

Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$ .

1. Combien existe-t-il de lois de composition internes sur  $E$  ?
2. Combien existe-t-il de lois de composition internes sur  $E$  commutatives ?
3. Combien existe-t-il de lois de composition internes sur  $E$  possédant un élément neutre ?
4. Combien existe-t-il de lois de composition internes sur  $E$  commutatives et possédant un élément neutre ?

---

## Analyse

L'essentiel de ces calculs de dénombrement « tourne » autour du résultat classique concernant le nombre d'applications d'un ensemble fini dans un autre ensemble fini. Dans chacune des quatre situations proposées, il convient d'identifier soigneusement ces deux ensembles.

---

## Résolution

### Question 1.

Soit  $N_1$  le nombre cherché.

Une loi de composition interne sur  $E$  est une application de  $E \times E$  dans  $E$ . Comme le cardinal de  $E \times E$  est égal à  $n^2$ , on a immédiatement :  $N_1 = \text{card}(E^{E^2}) = (\text{card } E)^{\text{card } E^2} = n^{(n^2)}$ .

Le nombre de lois de composition internes sur un ensemble de cardinal  $n$  est égal à :

$$n^{(n^2)}$$

### Question 2.

Soit  $N_2$  le nombre cherché.

Ici, on cherche des lois commutatives. De ce point de vue, pour  $x \neq y$ , les couples  $(x, y)$  et  $(y, x)$  de  $E^2$  jouent des rôles équivalents.

On définir une loi de composition interne commutative  $*$  on doit :

- Définir les  $n$  résultats des  $n$  opérations de la forme «  $x * x$  », ce qui revient à dénombrer le nombre d'applications de  $E$  dans  $E$  : il y en a  $n^n$ .
- Définir les résultats des  $\frac{n(n-1)}{2}$  (il y a  $\frac{n(n-1)}{2}$  paires  $\{x; y\}$  dans  $E$ ) opérations de la forme «  $x * y$  », ce qui revient à dénombrer le nombre d'applications de l'ensemble  $E'$  des paires d'éléments de  $E$  dans  $E$  : il y en a :  $\text{card}(E^{E'}) = (\text{card } E)^{\text{card } E'} = n^{\frac{n(n-1)}{2}}$ .

Enfinement :  $N_2 = n^n \times n^{\frac{n(n-1)}{2}} = n^{n + \frac{n(n-1)}{2}} = n^{\frac{n(n+1)}{2}}$ .

Le nombre de lois de composition internes commutatives sur un ensemble de cardinal  $n$  est égal à :

$$n^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

### Question 3.

Soit  $N_3$  le nombre cherché.

Dans cette question, on construit véritablement une telle loi de composition interne.

Rappelons, dans un premier temps, que lorsqu'une loi de composition interne admet un élément neutre, celui-ci est unique.

N'importe quel élément de  $E$  peut être l'élément neutre de la loi que nous notons  $*$ . On a donc  $n$  possibilités pour l'élément neutre que nous notons classiquement  $e$ .

Pour tout élément  $x$  de  $E$ , on a alors :  $x * e = e * x = x$ .

Ainsi, pour définir  $*$ , il nous faut désormais définir les résultats des opérations de la forme

$x * y$  avec  $x \neq e$  et  $y \neq e$ , ce qui revient à définir le nombre d'applications de  $(E \setminus \{e\})^2$  dans

$E$  : il y en a :  $n^{(n-1)^2}$ .

En définitive :  $N_3 = n \times n^{(n-1)^2} = n^{n^2 - 2n + 2}$ .

Le nombre de lois de composition internes possédant un élément neutre sur un ensemble de cardinal  $n$  est égal à :

$$n \times n^{(n-1)^2} = n^{n^2 - 2n + 2}$$

### Question 4.

Soit  $N_4$  le nombre cherché.

Comme pour la question 3, nous avons encore  $n$  possibilités pour le choix de l'élément neutre  $e$ .

On travaille ensuite avec l'ensemble  $E' = E \setminus \{e\}$  de cardinal  $n-1$ .

- Définir les  $n-1$  résultats des  $n-1$  opérations de la forme «  $x * x$  » revient à dénombrer le nombre d'applications de  $E'$  dans  $E$  : il y en a  $n^{n-1}$ .
- Définir les résultats des  $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$  (il y a  $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$  paires  $\{x; y\}$  dans  $E'$ ) opérations de la forme «  $x * y$  » revient à dénombrer le nombre d'applications de

l'ensemble  $E''$  des paires d'éléments de  $E'$  dans  $E$  : il y en a :

$$\text{card}(E^{E''}) = (\text{card } E)^{\text{card } E''} = n^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}.$$

$$\text{En définitive : } N_4 = n \times n^{n-1} \times n^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}} = n \times n^{\frac{n(n-1)}{2}} = n^{\frac{n^2-n+2}{2}}.$$

Le nombre de lois de composition internes commutatives possédant un élément neutre sur un ensemble de cardinal  $n$  est égal à :

$$n \times n^{\frac{n(n-1)}{2}} = n^{\frac{n^2-n+2}{2}}$$