Soit n et m deux entiers naturels.
Soit k un entier naturel inférieur ou égal à n et à m.

Montrer que l'on a :

$$\binom{n+m}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$$

Analyse

Chacun des trois coefficients binomiaux apparaissant dans l'égalité doit nous faire penser à une certaine formule du binôme … On peut s'aider du formalisme des polynômes (mais ce n'est pas, stricto sensu, une obligation) pour établir l'égalité cherchée.

Résolution

Le coefficient binomial $\binom{n+m}{k}$ nous conduit à considérer le polynôme $(1+X)^{n+m}$.

Les coefficients binomiaux $\binom{n}{i}$ et $\binom{m}{k-i}$ nous conduisent à considérer respectivement les polynômes $(1+X)^n$ et $(1+X)^m$.

On a alors :

$$\sum_{k=0}^{n+m}\binom{n+m}{k}X^k=(1+X)^{n+m}=(1+X)^n(1+X)^m=\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}X^i\right)\times\left(\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}X^j\right)$$

Dans le produit $\left(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}X^i\right)\times\left(\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}X^j\right)$, le coefficient de X^k est donné par $\sum_{\substack{i+j=k\\ i\leq n,\, j\leq m}}\binom{n}{i}\binom{m}{j}$.

Comme $i+j=k$, cette somme peut être récrite : $\sum_{\substack{i+j=k\\ i\leq n,\, j\leq m}}\binom{n}{i}\binom{m}{j}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$.

Il vient alors immédiatement : $\binom{n+m}{k}=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$, qui est le résultat cherché.

Résultat final

Pour tous entiers naturels k, n et m avec $k \leq n$ et $k \leq m$, on a :

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}$$