Soit n un entier naturel non nul.

Calculer les sommes :

$$P = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \sum_{0 \le 2k \le n} \binom{n}{2k}$$
$$I = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = \sum_{1 \le 2k+1 \le n} \binom{n}{2k+1}$$

Analyse

On doit penser à la somme $P + I = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et connaître sa valeur : 2^n. Une des façons les plus simples d'obtenir ce résultat consiste à choisir $a = b = 1$ dans la formule du binôme de Newton : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Cette démarche donne une piste pour obtenir une autre relation simple entre P et I …

Résolution

Avec $a = -1$ et $b = 1$, on obtient : $\left((-1)+1\right)^n = 0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \times 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$, soit :

$$0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots = \sum_{0 \le 2k \le n} \binom{n}{2k} - \sum_{0 \le 2k+1 \le n} \binom{n}{2k+1} = P - I$$

On dispose donc des deux relations : $P + I = 2^n$ et $P - I = 0$.
On obtient alors immédiatement : $P - I = 2^{n-1}$.

Résultat final

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{0 \le 2k \le n} \binom{n}{2k} = \sum_{0 \le 2k+1 \le n} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$$