

Soit  $n$  un entier naturel.

Montrer que pour tout entier naturel  $N$  supérieur à  $n$ , on a :

$$\sum_{k=n}^N \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}$$

---

## Analyse

Essayer une récurrence semble assez « naturel »...

---

## Résolution

Soit  $n$  un entier naturel fixé.

Pour  $N = n$ , on a :  $\sum_{k=n}^N \binom{k}{n} = \sum_{k=n}^n \binom{k}{n} = \binom{n}{n} = 1$  et  $\binom{N+1}{n+1} = \binom{n+1}{n+1} = 1$ .

L'égalité est donc vraie au rang  $N = n$ .

Soit maintenant  $N$  un entier naturel supérieur ou égal à  $n$  quelconque fixé.

On suppose que l'on a :  $\sum_{k=n}^N \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}$  et on veut montrer :  $\sum_{k=n}^{N+1} \binom{k}{n} = \binom{(N+1)+1}{n+1} = \binom{N+2}{n+1}$ .

On a :

$$\sum_{k=n}^{N+1} \binom{k}{n} = \sum_{k=n}^N \binom{k}{n} + \binom{N+1}{n} \stackrel{\text{hypothèse de récurrence}}{=} \binom{N+1}{n+1} + \binom{N+1}{n} \stackrel{\text{relation de Pascal}}{=} \binom{N+2}{n+1}.$$

L'égalité est donc vraie au rang  $N+1$ .

Comme la propriété est initialisée au rang  $N = n$  et héréditaire, elle est vraie pour tout  $N$  supérieur ou égal à  $n$ .

## Résultat final

Pour tout entier naturel  $n$  et tout entier naturel  $N$  supérieur ou égal à  $n$  :

$$\sum_{k=n}^N \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}$$

En guise de complément, nous fournissons ci-dessous une partie du triangle de Pascal et deux sommes correspondant respectivement à  $(n, N) = (2, 5)$  et  $(n, N) = (4, 6)$ .

0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

On a :

$$\sum_{k=2}^5 \binom{k}{2} = \binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + \binom{5}{2} = 1 + 3 + 6 + 10 = 20 = \binom{5+1}{2+1} = \binom{6}{3}$$

$$\sum_{k=4}^6 \binom{k}{4} = \binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} = 1 + 5 + 15 = 21 = \binom{6+1}{4+1} = \binom{7}{5}$$