Une entreprise dispose d'un stock de S pièces d'un produit.
La demande hebdomadaire pour ce produit peut être modélisée par une variable aléatoire D suivant une loi normale $\mathcal{N}(1000;100)$.

1. On suppose que l'on a, pour une semaine donnée : $S = 1120$.
   Quelle est la probabilité qu'il y ait rupture de stock cette semaine là ?

2. Quel devrait être le niveau de stock de l'entreprise pour que la probabilité de rupture de stock soit inférieure à 0,1 ? A 0,05 ?

Analyse

La situation proposée vise fondamentalement à la maîtrise du passage d'une loi normale quelconque à la loi normale centrée réduite dans un cadre pratique. On pourra manipuler des probabilités issues de tables ou obtenues grâce à un tableur. Dans les deux cas, on prendra soin de conserver la valeur approchée appropriée.

Résolution

En guise de préambule, rappelons que si la variable aléatoire D suit la loi normale : $\mathcal{N}(1000;100)$ alors, la variable aléatoire $\frac{D-1000}{100}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.

1. On cherche ici la probabilité que la demande D soit strictement supérieure au stock, c'est-à-dire : $p(D > 1120)$.

   On se ramène classiquement à $\frac{D-1000}{100}$:

$$D > 1120 \Leftrightarrow D - 1000 > 120 \Leftrightarrow \frac{D-1000}{100} > 1,2$$

On a donc, en tenant compte du fait que $\dfrac{D-1000}{100}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$ (on a utilisé un tableur pour obtenir une valeur approchée de $1-p\left(\dfrac{D-1000}{100}\le 1,2\right)$) :

$$p(D>1120)=p\left(\frac{D-1000}{100}>1,2\right)=1-p\left(\frac{D-1000}{100}\le 1,2\right)\simeq 0,115$$

La probabilité qu'il y ait une rupture de stock est donc égale à 0,115 (à 10^{-3} près).

2. Nous pouvons ici poser un unique calcul en notant α la probabilité et S la valeur du stock cherchée. On cherche donc S tel que : $p(D>S)\le\alpha$.

$$p(D>S)\le\alpha \Leftrightarrow p(D-1000>S-1000)\le\alpha \Leftrightarrow$$
$$p\left(\frac{D-1000}{100}>\frac{S-1000}{100}\right)\le\alpha \Leftrightarrow 1-p\left(\frac{D-1000}{100}\le\frac{S-1000}{100}\right)\le\alpha \Leftrightarrow$$
$$p\left(\frac{D-1000}{100}\le\frac{S-1000}{100}\right)\ge 1-\alpha$$

1er cas : $\alpha=0,1$

On doit résoudre : $p\left(\dfrac{D-1000}{100}\le\dfrac{S-1000}{100}\right)\ge 1-0,1$.

C'est-à-dire : $p\left(\dfrac{D-1000}{100}\le\dfrac{S-1000}{100}\right)\ge 0,9$.

Puisque nous raisonnons sur des quantités entières de pièces, nous allons considérer une valeur approchée au centième de la quantité $\dfrac{S-1000}{100}$, celle-ci comportant la valeur 100 au dénominateur.

A l'aide d'un tableur, on obtient : $1,28<\dfrac{S-1000}{100}<1,29$.

Nous retenons la valeur 1,29 puisque la fonction de répartition est strictement croissante ($p\left(\dfrac{D-1000}{100}\le 1,28\right)<0,9$ et $p\left(\dfrac{D-1000}{100}\le 1,29\right)>0,9$).

Avec cette valeur, on obtient :

$$\frac{S-1000}{100}=1,29 \Leftrightarrow S-1000=129 \Leftrightarrow S=1129$$

2$^{\text{ème}}$ cas : $\alpha = 0,05$

En raisonnant de façon similaire à ce qui vient d'être fait, ; on obtient l'inéquation :

$$p\left(\frac{D-1000}{100} \leq \frac{S-1000}{100}\right) \geq 0,95$$

On obtient alors : $1,64 < \frac{S-1000}{100} < 1,65$.

Avec la valeur 1,65 on obtient finalement :

$$\frac{S-1000}{100} = 1,65 \Leftrightarrow S-1000 = 165 \Leftrightarrow S = 1165$$

Pour que la probabilité qu'il y ait une rupture de stock soit inférieure à 0,1 (respectivement 0,05), le stock doit compter 1129 (respectivement 1165) unités.