

La densité  $f_n$  de la loi du  $\chi^2$  à  $n$  (entier naturel non nul) degrés de liberté est définie par :

$$f_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ t \mapsto f_n(t) = K_n \times t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}$$

Avec :  $K_n = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \times \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$ , constante strictement positive.

1. Calculer, pour tout réel  $t$  strictement positif  $f_n'(t)$ .
2. A quelle condition sur l'entier  $n$ , la fonction  $f_n$  admet-elle un extremum ?
3. En supposant satisfaite la condition obtenue à la question 2, préciser la nature de l'extremum, donner la valeur  $t^*$  de  $t$  correspondant à cet extremum et montrer que l'on a :

$$f_n(t^*) = K_n \times \left(\frac{n-2}{e}\right)^{\frac{n}{2}-1}$$

---

## Analyse

Un exercice qui vise à déterminer le mode de la loi du  $\chi^2$  à  $n$  degrés de liberté lorsqu'il existe. La possibilité d'annulation de la dérivée calculée à la première question avec changement de signe nous donne la condition nécessaire et suffisante d'existence d'un maximum local. A la troisième question, on montre facilement que ce maximum est global.

## Résolution

### Question 1.

La fonction  $f_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  comme produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle et on a, pour tout réel  $t$  strictement positif :

$$\begin{aligned}f_n'(t) &= K_n \left[ \left( \frac{n}{2} - 1 \right) t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} + \left( -\frac{1}{2} \right) t^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} \right] \\&= -\frac{1}{2} K_n t^{\frac{n}{2}-2} e^{-\frac{t}{2}} \left[ -2 \left( \frac{n}{2} - 1 \right) + t \right] \\&= -\frac{1}{2} K_n t^{\frac{n}{2}-2} e^{-\frac{t}{2}} [t - (n-2)]\end{aligned}$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, f_n'(t) = -\frac{1}{2} K_n t^{\frac{n}{2}-2} e^{-\frac{t}{2}} [t - (n-2)]$$

### Question 2.

Comme on travaille sur un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et comme la fonction  $f_n$  y est dérivable, on a :

la fonction  $f_n$  admet un extremum pour une valeur  $t^* > 0$  si, et seulement si, la dérivée de  $f_n$  s'annule en  $t^*$  en changeant de signe.

Or, pour tout réel  $t$  strictement positif, on a :  $t^{\frac{n}{2}-2} e^{-\frac{t}{2}} > 0$ .

Par ailleurs, le facteur  $t - (n-2)$  s'annule pour une valeur strictement positive de  $t$  si, et seulement si,  $n-2 > 0$  (la valeur annulant la dérivée valant alors  $n-2$ ). Enfin, dans ce cas, le monôme  $t - (n-2)$  s'annule en  $n-2$  en changeant de signe.

En définitive :

La fonction  $f_n$  admet un extremum si, et seulement si, on a :  $n > 2$ .

### Question 3.

On suppose dans cette question, que l'on a :  $n > 2$ .

La constante  $K_n$  étant strictement positive, on a :  $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, -\frac{1}{2} K_n t^{\frac{n}{2}-2} e^{-\frac{t}{2}} < 0$ . Il vient alors :

- Pour  $t \in ]0; n-2[$ , on a  $t - (n-2) < 0$  et donc  $f_n'(t) > 0$ . La fonction  $f_n$  est strictement croissante sur cet intervalle.

- $f_n'(n-2) = 0$ .
- Pour  $t > n-2$ , on a  $t - (n-2) > 0$  et donc  $f_n'(t) < 0$ . La fonction  $f_n$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $]n-2; +\infty[$ .

On déduit de ce qui précède que la fonction  $f_n$  admet un maximum global en  $t^* = n-2$ .

On a alors :

$$\begin{aligned}
 f_n(t^*) &= f_n(n-2) \\
 &= K_n (n-2)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{n-2}{2}} \\
 &= K_n (n-2)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)} \\
 &= K_n \left(\frac{n-2}{e}\right)^{\frac{n}{2}-1}
 \end{aligned}$$

Pour  $n > 2$ , la fonction  $f_n$  admet un maximum global en  $t^* = n-2$  et on a :

$$f_n(t^*) = K_n \left(\frac{n-2}{e}\right)^{\frac{n}{2}-1}$$