On considère une variable aléatoire X de loi de probabilité la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$).

On se propose dans cet exercice de déterminer l'espérance $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ et la variance de la variable aléatoire X.

On a admet que l'on a :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t} dt = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dx$$

1. En procédant à une intégration par parties, calculer :

$$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dx$$

2. En déduire $\mathrm{E}(\mathrm{X})$.

On admet maintenant que l'on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}(\mathrm{X}) &= \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - (\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2 \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t} dt - (\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2 \\
&= \left(\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t^2 e^{-\lambda t} dx \right) - (\mathrm{E}(\mathrm{X}))^2
\end{aligned}$$

3. En procédant à une double intégration par parties, calculer :

$$\int_0^x \lambda t^2 e^{-\lambda t} dx$$

4. En déduire $\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \lambda t^2 e^{-\lambda t} dx$ puis $\mathrm{V}(\mathrm{X})$.

Analyse

La loi exponentielle se prête à de nombreux calculs d'intégrale, comme autant d'entraînement pour ce thème. Pour autant, le calcul de son espérance et de sa variance joue un rôle un peu à part du fait de l'importance de ces paramètres. On retiendra, par ailleurs, la simplicité des résultats obtenus …

Résolution

Question 1.

Posons :

- $u(t)=t$ qui donne immédiatement $u'(t)=1$, continue sur tout intervalle de la forme $[0\,;x]$ avec $x\in\mathbb{R}_+$.
- $v'(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ qui est continue sur $[0\,;x]$. On peut choisir : $v(t)=-e^{-\lambda t}$.

Une intégration par parties donne alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}dt &= \int_0^x u(t)v'(t)dt \\
&= \left[u(t)v(t)\right]_0^x - \int_0^x u'(t)v(t)dt \\
&= \left[-te^{-\lambda t}\right]_0^x - \int_0^x 1\times\left(-e^{-\lambda t}\right)dt \\
&= -xe^{-\lambda x} + \int_0^x e^{-\lambda t}dt \\
&= -xe^{-\lambda x} + \left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^x \\
&= -xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}dt = -xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}}$$

Question 2.

Il convient de calculer ici : $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}dt = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}\right)$.

Comme $\lambda>0$, il vient : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\lambda x)=+\infty$.

On a : $xe^{-\lambda x}=\frac{x}{e^{\lambda x}}=\frac{1}{\lambda}\frac{\lambda x}{e^{\lambda x}}$.

On a : $\lim_{x\to+\infty}(\lambda x)=+\infty$ et $\lim_{X\to+\infty}\frac{X}{e^X}=0$ (croissances comparées).

On en déduit (composition) : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\lambda x}{e^{\lambda x}}=0$ et enfin : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\lambda x}{e^{\lambda x}}\right)=0$.

On a aussi : $\lim_{x\to+\infty}(\lambda x)=+\infty$ et $\lim_{X\to+\infty}e^{-X}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^X}=0$.

On en déduit (composition) : $\lim_{x\to+\infty}e^{-\lambda x}=0$ et enfin : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)=0$.

En définitive, on a (addition) : $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \lambda te^{-\lambda t}dt=\lim_{x\to+\infty}\left(-xe^{-\lambda x}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}+\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{1}{\lambda}$.

$$\boxed{\mathrm{E}(\mathrm{X})=\int_0^{+\infty}\lambda te^{-\lambda t}dt=\frac{1}{\lambda}}$$

Question 3.

Posons cette fois :

- $u(t)=t^2$ qui donne immédiatement $u'(t)=2t$, continue sur tout intervalle de la forme $[0\,;x]$ avec $x\in\mathbb{R}_+$.
- $v'(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ qui est continue sur $[0\,;x]$. On peut choisir : $v(t)=-e^{-\lambda t}$.

Une intégration par parties donne alors :

$$\begin{aligned}\int_0^x \lambda t^2e^{-\lambda t}dt&=\int_0^x u(t)v'(t)dt\\&=\left[u(t)v(t)\right]_0^x-\int_0^x u'(t)v(t)dt\\&=\left[-t^2e^{-\lambda t}\right]_0^x-\int_0^x 2t\times\left(-e^{-\lambda t}\right)dt\\&=-x^2e^{-\lambda x}+2\int_0^x te^{-\lambda t}dt\end{aligned}$$

On a, d'après la question 1 : $\int_0^x te^{-\lambda t}dt=\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty}\lambda te^{-\lambda t}dt=\frac{1}{\lambda}\left(-xe^{-\lambda x}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}+\frac{1}{\lambda}\right)$.

D'où :

$$\begin{aligned}\int_0^x \lambda t^2 e^{-\lambda t}dt &= -x^2e^{-\lambda x}+2\int_0^x te^{-\lambda t}dt\\ &= -x^2e^{-\lambda x}+\frac{2}{\lambda}\left(-xe^{-\lambda x}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}+\frac{1}{\lambda}\right)\\ &= -x^2e^{-\lambda x}-\frac{2}{\lambda}xe^{-\lambda x}-\frac{2}{\lambda^2}e^{-\lambda x}+\frac{2}{\lambda^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \int_0^x \lambda t^2 e^{-\lambda t}dt = -x^2e^{-\lambda x}-\frac{2}{\lambda}xe^{-\lambda x}-\frac{2}{\lambda^2}e^{-\lambda x}+\frac{2}{\lambda^2}}$$

Question 4.

D'après la question 2. on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-xe^{-\lambda x}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}+\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{1}{\lambda}$ et, de fait :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{\lambda}\left(-xe^{-\lambda x}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}+\frac{1}{\lambda}\right)\right]=\frac{2}{\lambda^2}$$

Par ailleurs, on a : $x^2e^{-\lambda x}=\frac{x^2}{e^{\lambda x}}=\frac{1}{\lambda^2}\frac{(\lambda x)^2}{e^{\lambda x}}$.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\lambda x)=+\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{X^2}{e^X}=0$ (croissances comparées).

On en déduit (composition) : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\lambda x)^2}{e^{\lambda x}}=0$ et enfin : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\lambda^2}\frac{(\lambda x)^2}{e^{\lambda x}}\right)=0$.

Finalement :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \lambda t^2e^{-\lambda t}dt=\lim_{x\to+\infty}\left[-x^2e^{-\lambda x}+\frac{2}{\lambda}\left(-xe^{-\lambda x}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}+\frac{1}{\lambda}\right)\right]=\frac{2}{\lambda^2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \lambda t^2e^{-\lambda t}dt=\frac{2}{\lambda^2}}$$

Il vient finalement :

$$\mathrm{V}(\mathrm{X})=\left(\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \lambda t^2e^{-\lambda t}dt\right)-\left(\mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^2=\frac{2}{\lambda^2}-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2}$$

$$\boxed{\mathrm{V}(\mathrm{X})=\frac{1}{\lambda^2}}$$

Remarque : au-delà de la simplicité des expressions de l'espérance et de la variance, on remarquera que l'espérance et l'écart type ($\sigma = \sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{X})} = \frac{1}{\lambda}$) sont égaux. Ainsi, lorsque l'on observe des réalisations d'une variable aléatoire et que l'on constate que l'espérance et l'écart type estimés sont très proches, on peut légitimement envisager de modéliser la loi de cette variable aléatoire par une loi exponentielle.