

On considère deux variables aléatoires réelles indépendantes X et Y de même loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$.

On pose : $R = \min(X, Y)$ et $S = \max(X, Y)$.

1. Déterminer les fonctions de répartition et les densités de R et S .
2. On pose : $T = |X - Y|$. Calculer $E(T)$.

Analyse

Un exercice classique autour de la loi uniforme qui permet en fait (2^{ème} question) de répondre à un petit « problème pratique » ...

Résolution

Question 1.

On a facilement l'équivalence : $\max(X, Y) \leq x \Leftrightarrow (X \leq x) \text{ et } (Y \leq x)$.

D'où : $F_S(x) = p(S \leq x) = p[\max(X, Y) \leq x] = p[(X \leq x) \text{ et } (Y \leq x)]$.

Les V.A.R. X et Y étant indépendantes : $p[(X \leq x) \text{ et } (Y \leq x)] = p(X \leq x) \times p(Y \leq x)$.

Comme X et Y suivent la même loi uniforme sur l'intervalle $[0;1]$, il vient :

- Si $x < 0$: $p(X \leq x) = p(Y \leq x) = 0$ et $p(S \leq x) = p[(X \leq x) \text{ et } (Y \leq x)] = 0$.
- Si $x \in [0;1]$: $p(X \leq x) = p(Y \leq x) = x$ et $p(S \leq x) = p[(X \leq x) \text{ et } (Y \leq x)] = x^2$.
- Si $x > 1$: $p(X \leq x) = p(Y \leq x) = 1$ et $p(S \leq x) = p[(X \leq x) \text{ et } (Y \leq x)] = 1$.

$$F_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \in [0;1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La fonction de répartition F_S de la V.A.R. S est dérivable partout sur \mathbb{R} sauf en 1 et on a immédiatement :

- Si $x < 0$, $F_S'(x) = f_S(x) = 0$;
- Si $x \in [0; 1[$, $F_S'(x) = f_S(x) = 2x$;
- Si $x > 1$, $F_S'(x) = f_S(x) = 0$.

En choisissant : $f_S(1) = 2$ (ce choix est arbitraire ... n'importe quelle valeur positive aurait convenu), il vient finalement :

$$f_S(x) = 2x \times 1_{[0;1]}(x)$$

où $1_{[0;1]}$ désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[0; 1]$.

On a également l'équivalence : $\min(X, Y) > x \Leftrightarrow (X > x) \text{ et } (Y > x)$.

D'où :

$$F_R(x) = p(R \leq x) = p[\min(X, Y) \leq x] = 1 - p[\min(X, Y) > x] = 1 - p[(X > x) \text{ et } (Y > x)].$$

Les V.A.R. X et Y étant indépendantes : $p[(X > x) \text{ et } (Y > x)] = p(X > x) \times p(Y > x)$.

Comme X et Y suivent la même loi uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$, il vient :

- Si $x \leq 0$: $p(X > x) = p(Y > x) = 1$ et $p(R \leq x) = 1 - p[(X > x) \text{ et } (Y > x)] = 0$.
- Si $x \in [0; 1]$: $p(X > x) = p(Y > x) = 1 - x$ et
 $p(R \leq x) = 1 - p[(X > x) \text{ et } (Y > x)] = 1 - p(X > x) \times p(Y > x) = 1 - (1 - x)^2 = 2x - x^2$.
- Si $x \geq 1$: $p(X > x) = p(Y > x) = 0$ et $p(R \leq x) = 1 - p[(X \leq x) \text{ et } (Y \leq x)] = 1$.

Donc :

$$F_R(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } x \in [0; 1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La fonction de répartition F_R de la V.A.R. R est dérivable partout sur \mathbb{R} sauf en 0 et on a immédiatement :

- Si $x < 0$, $F_R'(x) = f_R(x) = 0$;
- Si $x \in]0; 1]$, $F_R'(x) = f_R(x) = 2 - 2x = 2(1 - x)$;
- Si $x > 1$, $F_R'(x) = f_R(x) = 0$.

En choisissant : $f_R(0) = 2$, il vient finalement :

$$f_R(x) = 2(1 - x) \times 1_{[0;1]}(x)$$

En définitive :

$$F_R(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x - x^2 & \text{si } x \in [0; 1] \text{ et } f_R(x) = 2(1-x) \times 1_{[0;1]}(x) \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$F_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \in [0; 1] \text{ et } f_S(x) = 2x \times 1_{[0;1]}(x) \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Question 2.

Notons que l'on a :

$$T = |X - Y| = \max(X, Y) - \min(X, Y) = S - R$$

Il vient alors immédiatement (linéarité de l'espérance) :

$$E(T) = E(S - R) = E(S) - E(R)$$

$$\text{On a : } E(S) = \int_{\mathbb{R}} x f_S(x) dx = \int_{\mathbb{R}} x \times 2x \times 1_{[0;1]}(x) dx = 2 \int_0^1 x^2 dx \text{ et}$$

$$E(R) = \int_{\mathbb{R}} x f_R(x) dx = \int_{\mathbb{R}} x \times 2(1-x) \times 1_{[0;1]}(x) dx = 2 \int_0^1 (x - x^2) dx.$$

D'où :

$$\begin{aligned} E(T) &= E(S) - E(R) \\ &= 2 \int_0^1 x^2 dx - 2 \int_0^1 (x - x^2) dx = 2 \int_0^1 (2x^2 - x) dx \\ &= 2 \left[\frac{2}{3} x^3 - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 = 2 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) = 2 \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$E(T) = E(S - R) = \frac{1}{3}$$

Ce résultat peut être interprété simplement : si on considère un segment de longueur arbitraire non nulle (on peut toujours poser que cette longueur est égale à 1, ce qui simplifie les calculs mais ne change rien à leur portée !) et que l'on choisit deux points au hasard sur ce segment (typiquement les positions de ces points correspondent aux valeurs des V.A.R. X et Y) alors la distance moyenne entre ces deux points sera égale au tiers de la longueur initiale.