Résoudre :

$$\arctan(2x)+\arctan(3x)=\frac{\pi}{4}$$

Analyse

On considèrera les tangentes de chaque membre de l'égalité en se gardant de raisonner par équivalence …

Résolution

Rappelons que l'on a : $\arctan(2x)\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et $\arctan(3x)\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

On a ensuite :

$$\begin{aligned}\tan\left[\arctan(2x)+\arctan(3x)\right]&=\frac{\tan\left[\arctan(2x)\right]+\tan\left[\arctan(3x)\right]}{1-\tan\left[\arctan(2x)\right]\times\tan\left[\arctan(3x)\right]}\\&=\frac{2x+3x}{1-2x\times 3x}\\&=\frac{5x}{1-6x^2}\end{aligned}$$

On a alors :

$$\arctan(2x)+\arctan(3x)=\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow\tan\left[\arctan(2x)+\arctan(3x)\right]=\tan\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{5x}{1-6x^2}=1$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}6x^2+5x-1=0\\1-6x^2\neq 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ ou } x=\frac{1}{6}$$

La solution -1 est à rejeter sans quoi, on aurait : $\arctan(2x)<0$ et $\arctan(3x)<0$, d'où $\arctan(2x)+\arctan(3x)<0$.

Finalement : $x=\frac{1}{6}$.

Résultat final

L'équation $\arctan(2x)+\arctan(3x)=\frac{\pi}{4}$ admet pour unique solution : $x=\frac{1}{6}$.