Définir les fonctions arcsin et arccos à l'aide de la fonction arctan.

Analyse

On se doit ici de connaître très précisément les définitions des fonctions circulaires réciproques, les ensembles de définition et d'arrivée jouant des rôles déterminants.

Résolution

Rappelons que la fonction arcsin est bijective de l'intervalle $\left[-1\,;1\right]$ dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi, si $y=\arcsin x$, alors $\cos y\geq 0$. On a donc :

$$\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$$

Pour tout x dans l'intervalle $\left]-1\,;1\right[$, on a donc :

$$\tan y=\frac{\sin y}{\cos y}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Et donc : $y=\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Finalement :

Pour tout réel x dans l'intervalle $\left]-1\,;1\right[$, on a :

$$\arcsin x=\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Le cas de la fonction arccos est un peu plus délicat puisque celle-ci est bijective de l'intervalle $\left[-1\,;1\right]$ dans l'intervalle $\left[0\,;\pi\right]$ alors que la fonction arctan prend ses valeurs dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$. Si $y=\arccos x$, alors $\sin y\geq 0$. On a donc :

$$\sin y=\sqrt{1-\cos^2 y}=\sqrt{1-x^2}$$

Pour tout x dans l'intervalle $\left[-1\,;1\right]$ et différent de 0, on a donc :

$$\tan y = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

Comme y appartient à l'intervalle $[0\,;\pi]$ (en toute rigueur privé de $\frac{\pi}{2}$ puisque nous avons supposé x non nul), on ne peut pas froidement écrire : « $y = \arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ ».

On va en fait distinguer deux cas :

- Si $x \in [-1\,;0[$ alors $y = \arccos x \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$. Mais alors $y - \pi \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;0\right]$ et comme $\tan(y-\pi) = \tan y$, on en déduit finalement : $y - \pi = \arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, soit $y = \pi + \arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.
- Si $x \in]0\,;1]$ alors $y = \arccos x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et on a immédiatement cette fois : $y = \arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

Finalement :

Pour tout réel x dans l'intervalle $[-1\,;0[\cup]0\,;1]$, on a :

- Si $x \in [-1\,;0[$ alors $y = \pi + \arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.
- Si $x \in]0\,;1]$ alors $y = \arctan\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.