On pose : $x = \arcsin \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Calculer $\cos(4x)$ et déduire *x*.

Analyse

Le calcul de $\cos(4x)$ permet d'obtenir une relation simple entre $\cos(4x)$ et $\sin x$. On est ainsi ramené (mais il n'y a pas équivalence !) à une équation trigonométrique.

Résolution

Rappelons d'abord que l'on cherche *x* dans l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

On a, pour tout *x* réel : $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$. D'où :

$$\begin{aligned}
\cos(4x) &= 2\cos^2(2x) - 1 \\
&= 2\left(2\cos^2 x - 1\right)^2 - 1 \\
&= 2\left(4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1\right) - 1 \\
&= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1
\end{aligned}$$

Avec $x = \arcsin \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$, il vient :

$$\begin{aligned}
\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 &= \left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)\left(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{4}\right) \\
&= \frac{4-1-\sqrt{5}}{4} \times \frac{4+1+\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{4} \times \frac{5+\sqrt{5}}{4} = \frac{10-2\sqrt{5}}{16} \\
&= \frac{5-\sqrt{5}}{8}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\cos(4x) &= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 = 8\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^2 - 8\frac{5-\sqrt{5}}{8} + 1 \\ &= 8\frac{30-10\sqrt{5}}{64} - 5 + \sqrt{5} + 1 = \frac{30-10\sqrt{5}}{8} - 4 + \sqrt{5} \\ &= \frac{15-5\sqrt{5}}{4} - 4 + \sqrt{5} = \frac{1}{4}\left(15 - 5\sqrt{5} - 16 + 4\sqrt{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \\ &= -\frac{1+\sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

Ainsi, $x = \arcsin\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ vérifie : $\cos(4x) = -\sin x$.

On procède alors classiquement de façon à faire apparaître une égalité entre cosinus :

$$\begin{aligned}\cos(4x) = -\sin x = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) &= \cos\left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\end{aligned}$$

On en tire alors :

$$4x = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \ \text{ ou } \ 4x = -\frac{\pi}{2} - x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Etudions ces deux possibilités.

$$4x = \frac{\pi}{2} + x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 3x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$$

Il vient alors :

$$-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \le \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \le \frac{1}{2} + 2k \le \frac{3}{2} \Leftrightarrow -2 \le 2k \le 1 \Leftrightarrow -1 \le k \le \frac{1}{2}$$

k étant entier, les deux seules possibilités sont : $k = -1$ et $k = 0$.

Pour $k = -1$, on a : $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} = \frac{\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$ et $\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \neq \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.
On ne retient pas cette valeur de *x*.
Pour $k = 0$, on a : $x = \frac{\pi}{6} + 0 = \frac{\pi}{6}$ et $\sin x = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.
On ne retient pas cette valeur de *x*.

$$4x = -\frac{\pi}{2} - x + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 5x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z}$$

Il vient alors :

$$-\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}\le -\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}\le\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow -5\le -1+4k\le 5\Leftrightarrow -4\le 4k\le 6\Leftrightarrow -1\le k\le\frac{3}{2}$$

k étant entier, les trois seules possibilités sont : $k=-1$, $k=0$ et $k=1$.

Pour $k=-1$, on a : $x=-\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}=-\frac{\pi}{10}-\frac{2\pi}{5}=-\frac{5\pi}{10}=-\frac{\pi}{2}$ et $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1\neq\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

On ne retient pas cette valeur de *x*.

Pour $k=0$, on a : $x=-\frac{\pi}{10}+0=-\frac{\pi}{10}$ et $\sin x=\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)<0$ d'où $\sin x\neq\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

On ne retient pas cette valeur de *x*.

Pour $k=1$, on a : $x=-\frac{\pi}{10}+\frac{2k\pi}{5}=-\frac{\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}=\frac{3\pi}{10}$ et il s'agit de la seule valeur de *x* qui convient :

$$\sin x=\sin\left(\frac{3\pi}{10}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Résultat final

$$\arcsin\frac{1+\sqrt{5}}{4}=\frac{3\pi}{10}$$