Simplifier : $\arctan\frac{x-1}{x+1}$.

Analyse

On peut « assez naturellement » poser $f(x)=\arctan\frac{x-1}{x+1}$ et penser à dériver *f* (la dérivée d'une fonction rationnelle est encore une fonction rationnelle et la dérivée de la fonction arctan est elle-même une fonction rationnelle). On doit simplement prendre garde au fait que la fonction *f* n'est pas définie en -1 …

Résolution

On considère donc la fonction *f* définie par :

$$f:\begin{cases}\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\\ x\mapsto\arctan\frac{x-1}{x+1}\end{cases}$$

La fonction $x\mapsto\frac{x-1}{x+1}$ est dérivable sur les intervalles $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$ comme fonction rationnelle. La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. On en déduit ainsi que la fonction f est dérivable sur les intervalles $]-\infty;-1[$ et $]-1;+\infty[$.

Pour tout *x* réel différent de -1 il vient alors :

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1\times(x+1)-(x-1)\times1}{(x+1)^2}\times\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}\\&=2\times\frac{1}{(x+1)^2+(x-1)^2}\\&=\frac{2}{x^2+2x+1+x^2-2x+1}\\&=\frac{2}{2x^2+2}\\&=\frac{1}{x^2+1}\\&=\arctan'(x)\end{aligned}$$

Ainsi, les fonctions *f* et arctan admettent la même dérivée. Elles diffèrent donc d'une constante qui, à priori, n'a aucune raison d'être identique sur l'intervalle $]-\infty\,;-1[$ et sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$.

Sur $]-\infty\,;-1[$.

On a : $\arctan\frac{x-1}{x+1}=\arctan x+C_1$.

On a : $\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x}=1$, d'où (composition et arctan continue en 1) :

$\lim_{x\to-\infty}\arctan\frac{x-1}{x+1}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$. Par ailleurs : $\lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$.

On déduit de ce qui précède : $\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{2}+C_1$, soit : $C_1=\frac{3\pi}{4}$.

Sur $]-1\,;+\infty[$.

On a : $\arctan\frac{x-1}{x+1}=\arctan x+C_2$.

On a : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$, d'où (cf. ci-dessus) : $\lim_{x\to+\infty}\arctan\frac{x-1}{x+1}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$. Par ailleurs : $\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$.

On déduit de ce qui précède : $\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+C_2$, soit : $C_2=-\frac{\pi}{4}$.

Résultat final

- Pour $x\in\,]-\infty\,;-1[$, on a : $\arctan\frac{x-1}{x+1}=\arctan x+\frac{3\pi}{4}$.
- Pour $x\in\,]-1\,;+\infty[$, on a : $\arctan\frac{x-1}{x+1}=\arctan x-\frac{\pi}{4}$.