Etablir l'égalité :

$$\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$$

Analyse

Dans un premier temps, on peut donner un encadrement de l'angle $\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}$. Ensuite, on peut en déterminer le cosinus.

Résolution

Rappelons que la fonction arcsin définit une bijection strictement croissante de l'intervalle $[-1\,;+1]$ dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;+\frac{\pi}{2}\right]$.

Comme $\frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{4}{5}<1$ (comparer les carrés par exemple), il vient : $\frac{\pi}{4}<\arcsin\frac{4}{5}<\frac{\pi}{2}$ et, classiquement : $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5}$.

Comme $0<\frac{5}{13}<\frac{1}{\sqrt{2}}$, il vient : $0<\arcsin\frac{5}{13}<\frac{\pi}{4}$ et :

$\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{25}{169}}=\sqrt{\frac{144}{169}}=\frac{12}{13}$.

Comme $0<\frac{16}{65}<\frac{1}{\sqrt{2}}$, il vient : $0<\arcsin\frac{16}{65}<\frac{\pi}{4}$ et :

$\cos\left(\arcsin\frac{16}{65}\right)=\sqrt{1-\left(\frac{16}{65}\right)^2}=\sqrt{\frac{65^2-16^2}{65^2}}=\sqrt{\frac{49\times 81}{13^2}}=\frac{7\times 9}{13}=\frac{63}{13}$.

Les trois inégalités doubles nous permettent alors d'écrire :

$$\frac{\pi}{4}<\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}<\pi$$

La fonction cosinus étant bijective de $[-\pi\,;+\pi]$ dans $[-1\,;+1]$, on a intérêt à considérer le cosinus de $\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}$.

On a, de façon générale :

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta+\gamma) &= \cos(\alpha+\beta)\cos\gamma - \sin(\alpha+\beta)\sin\gamma \\ &= [\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta]\cos\gamma - [\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta]\sin\gamma \\ &= \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma \\ &= \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos\alpha\sin\beta\sin\gamma - \sin\alpha\cos\beta\sin\gamma - \sin\alpha\sin\beta\cos\gamma\end{aligned}$$

Ici, en tenant compte des cosinus calculés plus haut :

$$\begin{aligned}\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}\right) &= \cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)\cos\left(\arcsin\frac{16}{65}\right) \\ &\quad -\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)\sin\left(\arcsin\frac{16}{65}\right) \\ &\quad -\sin\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\cos\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)\sin\left(\arcsin\frac{16}{65}\right) \\ &\quad -\sin\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)\sin\left(\arcsin\frac{5}{13}\right)\cos\left(\arcsin\frac{16}{65}\right) \\ &= \frac{3}{5}\times\frac{12}{13}\times\frac{63}{65}-\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}\times\frac{16}{65}-\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}\times\frac{16}{65}-\frac{4}{5}\times\frac{5}{13}\times\frac{63}{65} \\ &= \frac{1}{5\times13\times65}\times(3\times12\times63-3\times5\times16-4\times12\times16-4\times5\times63) \\ &= \frac{12}{5\times13\times65}\times(3\times63-5\times4-4\times16-5\times21) \\ &= \frac{12}{5\times13\times65}\times(189-20-64-105) \\ &= 0\end{aligned}$$

Le seul angle de l'intervalle $\left]\frac{\pi}{4};\pi\right[$ ayant un cosinus nul est $\frac{\pi}{2}$.

Le résultat est ainsi établi.

Résultat final

$$\boxed{\arcsin\frac{4}{5}+\arcsin\frac{5}{13}+\arcsin\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}}$$