Résoudre l'équation :

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)$$

On représentera sur le cercle trigonométrique les points correspondant aux solutions obtenues.

Analyse

Application de la méthode de résolution des équations de la forme $\cos x = \cos a$.

Résolution

Rappelons que l'on a : $\cos x = \cos a \Leftrightarrow x = a + 2k\pi$ ou $x = -a + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Ici, on a donc : $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x+\frac{\pi}{3}=3x+\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou
$x+\frac{\pi}{3}=-\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)+2k\pi$ $x=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

→ Résolution de : $x+\frac{\pi}{3}=3x+\frac{\pi}{2}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

On a :

$$\begin{aligned}
& x+\frac{\pi}{3}=3x+\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\
\Leftrightarrow\ & -2x=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\
\Leftrightarrow\ & -2x=\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\
\Leftrightarrow\ & x=-\frac{\pi}{12}-k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\
\Leftrightarrow\ & x=-\frac{\pi}{12}+k'\pi,\ k'\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Sur l'intervalle $[0\,;2\pi[$, on obtient deux valeurs : $-\frac{\pi}{12}+\pi=\frac{11\pi}{12}$ et $-\frac{\pi}{12}+2\pi=\frac{23\pi}{12}$.

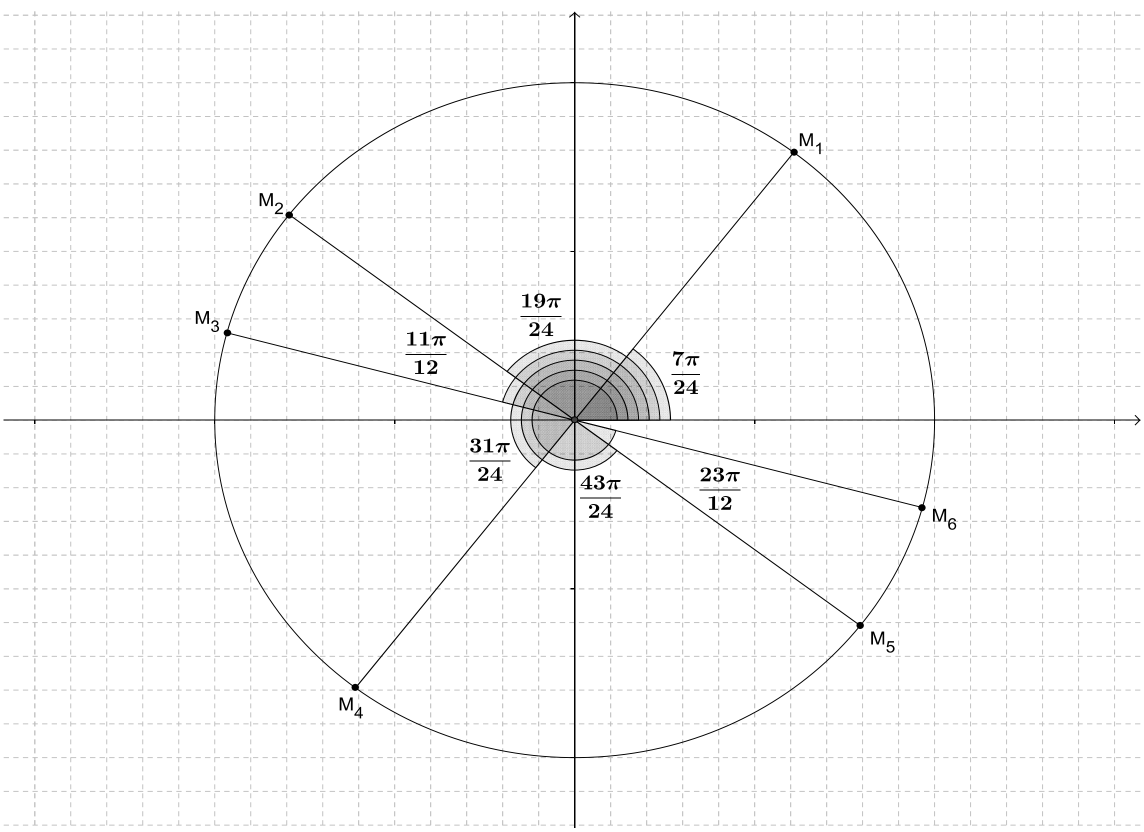
→ Résolution de : $x+\frac{\pi}{3}=-\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

On a :

$$\begin{aligned}
& x+\frac{\pi}{3}=-\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)+2k\pi,\, k\in\mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow\ & 4x=-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\, k\in\mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow\ & 4x=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi,\, k\in\mathbb{Z} \\
\Leftrightarrow\ & x=-\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},\, k\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Sur l'intervalle $[0\,;2\pi[$, on obtient quatre valeurs : $-\frac{5\pi}{24}+\frac{\pi}{2}=\frac{7\pi}{24}$, $-\frac{5\pi}{24}+\pi=\frac{19\pi}{24}$, $-\frac{5\pi}{24}+\frac{3\pi}{2}=\frac{31\pi}{24}$ et $-\frac{5\pi}{24}+2\pi=\frac{43\pi}{24}$.

D'où, les six angles mentionnés ci-dessus étant différents, les six points M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 et M_6 du cercle trigonométrique correspondant respectivement aux angles $\frac{7\pi}{24}$, $\frac{19\pi}{24}$, $\frac{11\pi}{12}$, $\frac{31\pi}{24}$, $\frac{43\pi}{24}$ et $\frac{23\pi}{12}$:



Résultat final

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{12}+k'\pi,\ k'\in\mathbb{Z} \text{ ou } x=-\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$$