

Soit α dans $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ tel que : $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

1. Calculer $\cos(2\alpha)$ puis en déduire la valeur de α .

2. Résoudre l'équation : $\cos x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

Analyse

La première question permet de reconnaître dans $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ le cosinus d'un angle « de référence ». La deuxième question est alors une application classique du cours.

Résolution

Question 1.

Comme $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$, il vient :

$$\cos(2\alpha) = 2 \times \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \right)^2 - 1 = 2 \times \frac{2+\sqrt{3}}{4} - 1 = \frac{2+\sqrt{3}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$$

On a : $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ et donc : $0 < 2\alpha < \pi$. On a alors :

$$\begin{cases} \cos(2\alpha) = \cos \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{12} \\ 0 < 2\alpha < \pi \end{cases}$$

Finalement :

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{12}$$

Question 2.

En utilisant le résultat de la question précédente, on a classiquement :

$$\cos x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{12} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

L'ensemble des solutions de l'équation $\cos x = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ est :

$$\left\{ \frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$