1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\sin(2x)+\cos x=0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\sin(2x)+m\cos x=0$, où m est un paramètre réel.

Analyse

Dans la première question, il convient de connaître la formule donnant le sinus de l'angle double. Cette première question prépare la généralisation abordée dans la seconde.

Résolution

Question 1.

Comme $\sin(2x)=2\sin x\cos x$, il vient :

$$\sin(2x)+\cos x=0 \Leftrightarrow 2\cos x\sin x+\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x(2\sin x+1)=0$$

Il vient alors (équation produit) :

$$\cos x(2\sin x+1)=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \text{ ou } 2\sin x+1=0$$

Classiquement : $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Par ailleurs :

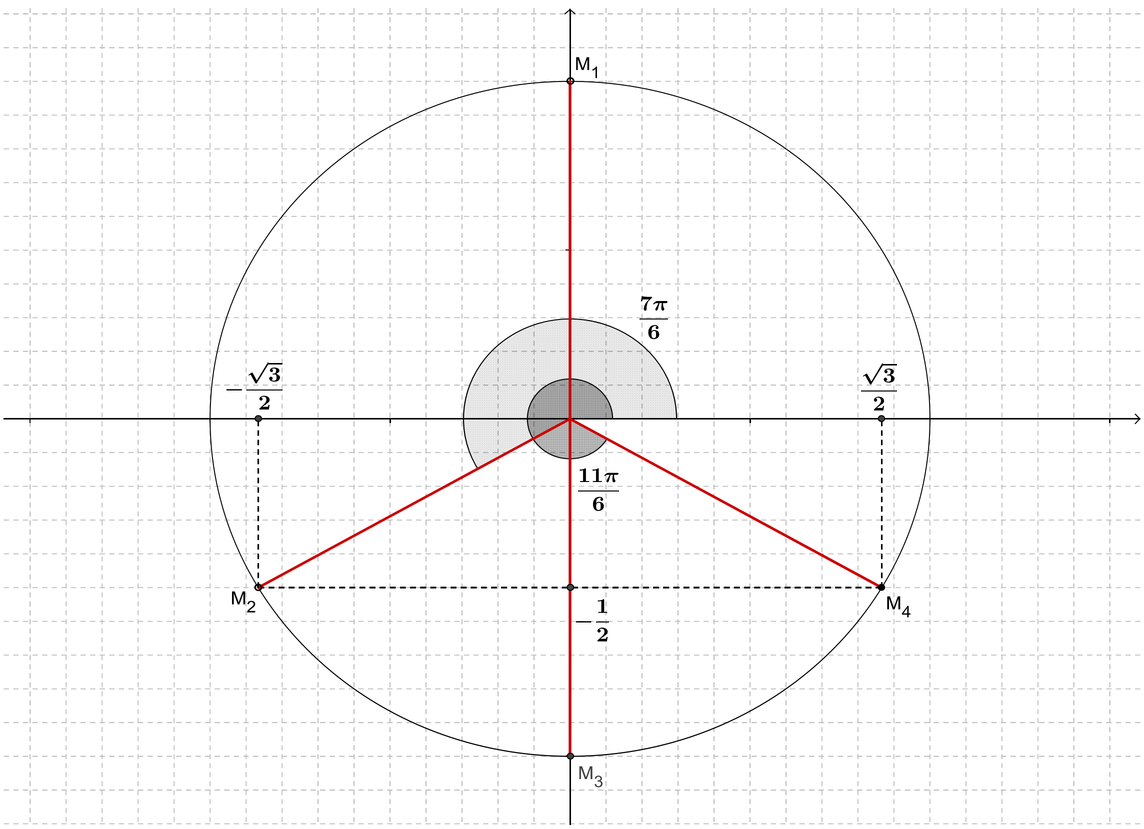
$$\begin{aligned}
&2\sin x+1=0 \Leftrightarrow \sin x=-\frac{1}{2}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\\
&\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } x=\pi-\left(-\frac{\pi}{6}\right)+2k\pi=\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\
&\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{6}+2\pi+2k\pi \text{ ou } x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\
&\Leftrightarrow x=\frac{11\pi}{6}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Finalement :

L'ensemble des solutions de l'équation $\sin(2x)+\cos x=0$ est :

$$\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{11\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

A titre de complément, nous fournissons ci-après une représentation graphique des quatre points M_1, M_2, M_3 et M_4 correspondant aux solutions ci-dessus.



Question 2.

Dans cette question, on va généraliser les résultats obtenus à la question précédente.

Le début de la résolution est similaire :

$$\sin(2x)+m\cos x=0 \Leftrightarrow 2\cos x\sin x+m\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x\left(2\sin x+m\right)=0$$

On a encore : $\cos x=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Par ailleurs : $2\sin x + m = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\dfrac{m}{2}$.

Cette deuxième équation n’admet de solutions que si l’on a : $-1 \leq -\dfrac{m}{2} \leq 1$, c'est-à-dire $-2 \leq -m \leq 2$.

On va donc distinguer deux cas.

Si $m < -2$ ou $m > 2$, l’équation $\sin x = -\dfrac{m}{2}$ ’admet pas de solution.

Si $-2 \leq -m \leq 2$, alors l’équation $\sin x = -\dfrac{m}{2}$ admet une unique solution α dans l’intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ et l’ensemble des solutions de cette équation est :

$$\{\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$$

Finalement :

L’ensemble des solutions de l’équation $\sin(2x) + m\cos x = 0$ est :

$$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \text{ pour } m < -2 \text{ ou } m > 2$$

$$\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \{\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \text{ pour } -2 \leq -m \leq 2,$$

α étant l’unique réel de $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin\alpha = -\dfrac{m}{2}$.