1. Développer $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $4\sin^2 x - 2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\sin x + \sqrt{6} = 0$.

Analyse

Pour la résolution de l'équation, on effectuera un changement de variable pour se ramener à une équation du second degré « classique ».

Résolution

Question 1.

On a immédiatement :

$$\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2 = \sqrt{3}^2 + \sqrt{2}^2 - 2\times\sqrt{3}\times\sqrt{2} = 3+2-2\sqrt{6} = 5-2\sqrt{6}$$

$$\boxed{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2 = 5-2\sqrt{6}}$$

Question 2.

Nous commençons par nous ramener à une équation du second degré en posant $X = \sin x$. On ne retiendra donc que les solutions appartenant à l'intervalle $[-1;1]$.

L'équation se récrit : $4X^2 - 2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)X + \sqrt{6} = 0$.

Le discriminant associé vaut :

$$\begin{aligned}\Delta &= \left[-2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]^2 - 4\times 4\times\sqrt{6} = 4\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 - 16\sqrt{6}\\ &= 4\left(\sqrt{2}^2+\sqrt{3}^2+2\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\right) - 16\sqrt{6} = 4\left(2+3+2\sqrt{6}\right) - 16\sqrt{6}\\ &= 20+8\sqrt{6}-16\sqrt{6} = 20-8\sqrt{6}\\ &= 4\left(5-2\sqrt{6}\right)\end{aligned}$$

D'après la question précédente, $5-2\sqrt{6}=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$ et comme $\sqrt{3}>\sqrt{2}$, il vient immédiatement : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{4\left(5-2\sqrt{6}\right)}=2\sqrt{5-2\sqrt{6}}=2\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}=2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$.

Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $4X^2-2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)X+\sqrt{6}=0$ sont donc :

$$X_1=\frac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)-2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{2\times 4}=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2\times 4}=\frac{4\sqrt{2}}{2\times 4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$X_2=\frac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{2\times 4}=\frac{2\sqrt{2}+2\sqrt{3}+2\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{2\times 4}=\frac{4\sqrt{3}}{2\times 4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ces deux valeurs appartiennent bien à l'intervalle $[-1;1]$ et on doit désormais résoudre les deux équations : $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{4}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \text{ ou } x=\pi-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow \sin x=\sin\frac{\pi}{3}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } x=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \text{ ou } x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

Finalement :

L'ensemble des solutions de l'équation $4\sin^2 x-2\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\sin x+\sqrt{6}=0$ est :

$$\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$