Montrer que pour tout x réel positif, on a :

$$x-\frac{x^3}{6}\leq \sin x\leq x$$

Analyse

Un encadrement du sinus sur $\mathbb{R}_+$ qui est particulièrement utile dans bien des situations (notamment calculs de nombres dérivés). La démarche est très classique et doit être connue.

Résolution

On définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction *f* par $f : x \mapsto x-\sin x$.
La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout x réel positif, il vient : $f'(x)=1-\cos x$.
Or, pour tout x réel, et donc tout x positif, on a : $-1\leq \cos x\leq 1$. On en déduit $-1\leq -\cos x\leq 1$ et enfin : $0\leq 1-\cos x\leq 2$.
Ainsi, pour tout x positif, on a $f'(x)\geq 0$ et on en conclut immédiatement que la fonction *f* est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
On a par ailleurs : $f(0)=0-\sin 0=0$.
De la croissance de *f* on tire alors :

$$x\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq f(0) \Leftrightarrow f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x-\sin x\geq 0 \Leftrightarrow x\geq \sin x$$

Une première inégalité est ainsi établie.

Nous allons établir l'autre inégalité de façon analogue.

Nous introduisons cette fois la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g : x\mapsto \sin x-\left(x-\frac{x^3}{6}\right)$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout x positif, il vient : $g'(x)=\cos x-\left(1-\frac{3x^2}{6}\right)=\cos x-\left(1-\frac{x^2}{2}\right)$.

La fonction g' est elle-même dérivable comme différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout réel x positif, on a : $g''(x)=-\sin x-\left(0-\frac{2x}{2}\right)=-\sin x+x=f(x)$.

On a vu précédemment que la fonction *f* était positive sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit immédiatement que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+, g''(x) \geq 0$. La fonction g' est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Mais $g'(0) = \cos 0 - \left(1 - \frac{0^2}{2}\right) = 1 - 1 = 0$.

De la croissance de g' on tire alors :

$$x \geq 0 \Leftrightarrow g'(x) \geq g'(0) \Leftrightarrow g'(x) \geq 0$$

La fonction *g* est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Mais $g(0) = \sin 0 - \left(0 - \frac{0^3}{6}\right) = 0 - 0 = 0$, d'où :

$$x \geq 0 \Leftrightarrow g(x) \geq g(0) \Leftrightarrow g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$$

La seconde inégalité est ainsi établie.

Résultat final

Pour tout *x* réel positif on a :

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$$

Compléments

Soit *x* un réel négatif. $-x$ est donc positif et d'après le résultat précédent, on peut écrire :

$$-x - \frac{(-x)^3}{6} \leq \sin(-x) \leq -x$$

En tenant compte de : $(-x)^3 = -x^3$ et $\sin(-x) = -\sin x$, on a donc :

$$-x - \frac{-x^3}{6} \leq -\sin x \leq -x$$

Finalement : $x \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6}$.

Ainsi (voir le graphique ci-après) :

- Sur $\mathbb{R}_+$, la courbe représentative de la fonction sinus est située sous la droite d'équation $y = x$ (1ère bissectrice) et au-dessus de la courbe d'équation $y = x - \dfrac{x^3}{6}$.
- Sur $\mathbb{R}_-$, la courbe représentative de la fonction sinus est située au-dessus de la 1ère bissectrice et sous la courbe d'équation $y = x - \dfrac{x^3}{6}$.