Pour tout x dans $[0;2\pi]$, simplifier :

$$\arccos(\cos x)-\frac{1}{2}\arccos\left(\cos(2x)\right)$$

Analyse

Rappelons que la fonction arccos est définie sur l'intervalle $[-1;1]$ et bijective de $[-1;1]$ dans $[0;\pi]$. On a ainsi : $\arccos(\cos x)=x \Leftrightarrow x\in[0;\pi]$.

Résolution

On a : $\arccos(\cos x)=x \Leftrightarrow x\in[0;\pi]$.

Pour $x\in[\pi;2\pi]$, on a : $\cos(2\pi-x)=\cos(-x)=\cos x$ et $2\pi-x\in[0;\pi]$.
Donc : $x\in[\pi;2\pi] \Rightarrow \arccos(\cos x)=2\pi-x$.

Pour $\arccos(\cos(2x))$, nous allons devoir distinguer 4 cas du fait du facteur 2 dans l'argument du cosinus :

- Si $x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$

  Dans ce cas, on a : $2x\in[0;\pi]$, d'où : $\arccos(\cos(2x))=2x$.

- Si $x\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

  Dans ce cas, $2x\in[\pi;2\pi]$, d'où : $\arccos(\cos(2x))=2\pi-2x$.

- Si $x\in\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$

  Dans ce cas, $2x\in[2\pi;3\pi]$ et $\cos(2x)=\cos(2x-2\pi)$ avec $2x-2\pi\in[0;\pi]$.
  D'où : $\arccos(\cos(2x))=\arccos(\cos(2x-2\pi))=2x-2\pi$.

- Si $x\in\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$

  Dans ce cas, $2x\in[3\pi;4\pi]$ et $\cos(4\pi-2x)=\cos(-2x)=\cos(2x)$ avec $4\pi-2x\in[0;\pi]$. D'où : $\arccos(\cos(2x))=\arccos(\cos(4\pi-2x))=4\pi-2x$.

Finalement :

- Si $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$

  $\arccos(\cos x)-\frac{1}{2}\arccos(\cos(2x))=x-\frac{1}{2}\times 2x=0$.

- Si $x \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$

  $\arccos(\cos x)-\frac{1}{2}\arccos(\cos(2x))=x-\frac{1}{2}\times(2\pi-2x)=2x-\pi$.

- Si $x \in \left[\pi\,;\frac{3\pi}{2}\right]$

  $\arccos(\cos x)-\frac{1}{2}\arccos(\cos(2x))=2\pi-x-\frac{1}{2}\times(2x-2\pi)=3\pi-2x$.

- Si $x \in \left[\frac{3\pi}{2}\,;2\pi\right]$

  $\arccos(\cos x)-\frac{1}{2}\arccos(\cos(2x))=2\pi-x-\frac{1}{2}\times(4\pi-2x)=0$.

Résultat final

$\arccos(\cos x)-\frac{1}{2}\arccos(\cos(2x))$ est égal à :

0 si $x \in \left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$

$2x-\pi$ si $x \in \left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$

$3\pi-2x$ si $x \in \left[\pi\,;\frac{3\pi}{2}\right]$

0 si $x \in \left[\frac{3\pi}{2}\,;2\pi\right]$