

Résoudre :

$$\arctan \frac{1}{x} + \arctan \frac{x-1}{x+1} = \frac{\pi}{4}$$

Analyse

Rappelons que la fonction arctan est définie et dérivable sur \mathbb{R} et bijective de \mathbb{R} dans $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

Résolution

On pose : $\varphi(x) = \arctan \frac{1}{x} + \arctan \frac{x-1}{x+1}$

Les fonctions inverse et $x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$ étant respectivement définies sur \mathbb{R}^* et sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et la fonction arctan étant définie sur \mathbb{R} , la fonction φ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

Les fonctions inverse et $x \mapsto \frac{x-1}{x+1}$ étant dérivables sur tout intervalle de leurs domaines de définition respectifs en tant que fonctions rationnelles et la fonction arctan étant dérivable sur \mathbb{R} , la fonction φ est dérivable sur tout domaine de son ensemble de définition, en particulier sur $] -\infty; -1[$, $] -1; 0[$ et $] 0; +\infty[$.

Pour tout réel x de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$ on a alors (dérivation d'une somme de deux fonctions composées) :

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= -\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} + \frac{1 \times (x+1) - (x-1) \times 1}{(x+1)^2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \\ &= -\frac{1}{x^2+1} + \frac{2}{(x+1)^2} \times \frac{1}{1 + \frac{(x-1)^2}{(x+1)^2}} = -\frac{1}{x^2+1} + \frac{2}{(x+1)^2 + (x-1)^2} \\ &= -\frac{1}{x^2+1} + \frac{2}{2x^2+2} = -\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que la fonction φ est constante sur chacun des intervalles $]-\infty; -1[$, $]-1; 0[$ et $]0; +\infty[$ (mais il n'y a aucune raison à priori que les trois constantes soient égales !).

Pour déterminer les constantes correspondant aux valeurs prises par φ sur les intervalles $]-\infty; -1[$, $]-1; 0[$ et $]0; +\infty[$, on peut donner des valeurs particulières à x ou raisonner sur des limites.

On a : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$ et donc, la fonction arctan étant continue en 0 : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan \frac{1}{x} = \arctan 0 = 0$.

Par ailleurs : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x} = 1$ et donc, la fonction arctan étant continue en 1 :

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arctan \frac{x-1}{x+1} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Ainsi, on a : $\forall x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$, $\varphi(x) = \arctan \frac{1}{x} + \arctan \frac{x-1}{x+1} = \frac{\pi}{4}$.

On a : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}$. D'où, par composition : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.

Par ailleurs, $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{x-1}{x+1} = -1$ et donc, la fonction arctan étant continue en -1 :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \arctan x = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Ainsi : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left(\arctan \frac{1}{x} + \arctan \frac{x-1}{x+1} \right) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$.

Finalement : $\forall x \in]-1; 0[$, $\varphi(x) = \arctan \frac{1}{x} + \arctan \frac{x-1}{x+1} = -\frac{3\pi}{4}$.

Résultat final

$$\arctan \frac{1}{x} + \arctan \frac{x-1}{x+1} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x \in]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[$$

Complément

Ce résultat permet d'obtenir de jolies relations ...

Par exemple, avec $x = 2$, on obtient : $\arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

Avec $x = -2$, on obtient : $\arctan \frac{1}{-2} + \arctan 3 = \frac{\pi}{4}$, soit : $\arctan 3 - \arctan \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$.

On peut aussi exploiter $\forall x \in]-1; 0[$, $\varphi(x) = \arctan \frac{1}{x} + \arctan \frac{x-1}{x+1} = -\frac{3\pi}{4}$.

Par exemple, avec $x = -\frac{1}{2}$, il vient : $\arctan(-2) + \arctan(-3) = -\frac{3\pi}{4}$, soit :

$$\arctan 2 + \arctan 3 = \frac{3\pi}{4}$$