Simplifier :

$$\cos\left(\arctan\left(\sin\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\right)\right)$$

Analyse

Si l'exercice ne présente pas de difficulté particulière, il convient cependant de se montrer précis sur les fonctions considérées, en particulier sur les signes et valeurs prises. Le premier travail consiste à exprimer simplement $\sin\left(\arctan\frac{1}{x}\right)$ en fonction de *x*.

Résolution

Commençons par un calcul préliminaire …
En utilisant le fait que les fonctions sinus et arctangente sont impaires et que la fonction cosinus est paire, il vient, pour tout *x* réel non nul :

$$\begin{aligned}\cos\left(\arctan\left(\sin\left(\arctan\left(-\frac{1}{x}\right)\right)\right)\right) &= \cos\left(\arctan\left(\sin\left(-\arctan\frac{1}{x}\right)\right)\right)\\ &= \cos\left(\arctan\left(-\sin\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\right)\right)\\ &= \cos\left(-\arctan\left(\sin\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\right)\right)\\ &= \cos\left(\arctan\left(\sin\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

On peut donc se limiter à $x > 0$.

Dans ce cas, on a $\theta = \arctan\frac{1}{x} \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$. Par ailleurs : $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{x}$.
On cherche $\sin\theta$.

Comme $\theta \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos\theta > 0$ et donc $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$.

D'où : $\frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} = \frac{1}{x}$ puis $x^2\sin^2\theta = 1-\sin^2\theta$ et, enfin : $\sin^2\theta = \frac{1}{1+x^2}$.

Comme $\theta \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\sin\theta > 0$ et donc : $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Ainsi, pour tout réel x strictement négatif, on a : $\sin\left(\arctan\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Posons alors : $\alpha = \arctan\left(\sin\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

On cherche $\cos\alpha$.

Comme $x > 0$, on obtient immédiatement $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} < 1$. Ainsi : $\alpha \in \left]0\,;\frac{\pi}{4}\right[$ et on en déduit : $\cos\alpha > 0$ et $\sin\alpha > 0$.

On a : $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}$ d'où : $\frac{1}{1+x^2} = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

On en tire : $\cos^2\alpha = \frac{1+x^2}{2+x^2}$ et, comme $\cos\alpha > 0$: $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1+x^2}{2+x^2}}$.

Finalement : $\cos\left(\arctan\left(\sin\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\right)\right) = \sqrt{\frac{1+x^2}{2+x^2}}$.

D'après le calcul préliminaire, ce résultat est valable pour tout x non nul.

Résultat final

Pour tout x réel non nul :

$$\cos\left(\arctan\left(\sin\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\right)\right) = \sqrt{\frac{1+x^2}{2+x^2}}$$

Complément

La fonction $\varphi : x \mapsto \cos\left(\arctan\left(\sin\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\right)\right)$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ tandis que la fonction $x \mapsto \sqrt{\frac{1+x^2}{2+x^2}}$ est définie sur $\mathbb{R}$.

On a facilement : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ puis, en utilisant la continuité des fonctions sin, arctan et cos : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \sin\left(\arctan\frac{1}{x}\right) = 1$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \arctan\left(\sin\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \cos\left(\arctan\left(\sin\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\right)\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

La fonction φ étant paire, on peut, d'après le résultat précédent la prolonger par continuité en 0. On peut ainsi définir sur $\mathbb{R}$ une fonction $\tilde{\varphi}$ de la façon suivante :

$$\tilde{\varphi} : x \mapsto \begin{cases} \cos\left(\arctan\left(\sin\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\right)\right) & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Dans ces conditions, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, \tilde{\varphi}(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{2+x^2}}$.