Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

On pose : $\|A\| = \sqrt{\operatorname{tr}\left({}^t A.A\right)}$.

1. Montrer que $\| \ \|$ est une norme.

2. Montrer que : $\forall (A, B) \in \left(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\right)^2, \|A.B\| \leq \|A\| \times \|B\|$.

Analyse

Cet exercice permet d'étudier une norme matricielle classique. Les calculs peuvent être un peu longs mais l'identification d'un certain produit scalaire permet (1ère question) d'être beaucoup plus efficace.

Résolution

Préambule

Posons $A = \left(a_{ij}\right)_{\substack{i \in [\![1;n]\!] \\ j \in [\![1;n]\!]}}$ et $B = {}^t A.A = \left(b_{ij}\right)_{\substack{i \in [\![1;n]\!] \\ j \in [\![1;n]\!]}}$.

Pour tout couple (i, j) dans $\left([\![1;n]\!]\right)^2$, on a alors : $b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}$.

Pour $i = j$, on a alors : $b_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2$.

D'où : $\operatorname{tr}\left({}^t A.A\right) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 \right) = \sum_{i,\, j} a_{ij}^2$.

En définitive, $\operatorname{tr}\left({}^t A.A\right)$ est la somme des carrés des éléments de la matrice A (résultat à connaître)

Question 1.

Le préambule peut nous faire penser à l'application :

$$\begin{aligned} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ (A, B) &\mapsto \operatorname{tr}\left({}^t A.B\right) \end{aligned}$$

En effet, avec $A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{i\in[\![1\,;\,n]\!]\\ j\in[\![1\,;\,n]\!]}}$ et $B=\left(b_{ij}\right)_{\substack{i\in[\![1\,;\,n]\!]\\ j\in[\![1\,;\,n]\!]}}$, on a facilement : $\operatorname{tr}\left({}^tA.B\right)=\sum_{i,\,j}a_{ij}b_{ij}$.
On vérifie facilement qu'il s'agit d'un produit scalaire

Ainsi, $\|\ \|$ n'est rien d'autre que la norme associée à ce produit scalaire.

On peut également procéder directement en se ramenant à la définition d'une norme.

On a clairement, d'après ce qui précède : $\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \operatorname{tr}\left({}^tA.A\right)\geq 0$. On en déduit alors :

$$\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ \|A\|=\sqrt{\operatorname{tr}\left({}^tA.A\right)}\geq 0$$

On a ensuite :

$$\begin{aligned}
&\|A\|=0\\
\Leftrightarrow\ &\sqrt{\operatorname{tr}\left({}^tA.A\right)}=0\\
\Leftrightarrow\ &\operatorname{tr}\left({}^tA.A\right)=0\\
\Leftrightarrow\ &\sum_{i,\,j}a_{ij}^2=0\\
\Leftrightarrow\ &\forall(i,\ j)\in\left([\![1\,;\,n]\!]\right)^2,\ a_{ij}^2=0\\
\Leftrightarrow\ &\forall(i,\ j)\in\left([\![1\,;\,n]\!]\right)^2,\ a_{ij}=0\\
\Leftrightarrow\ &A=0
\end{aligned}$$

Pour toute matrice A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et tout réel λ, on a :

$$\|\lambda A\|=\sqrt{\sum_{i,\,j}\left(\lambda a_{ij}\right)^2}=\sqrt{\sum_{i,\,j}\lambda^2a_{ij}^2}=\sqrt{\lambda^2\sum_{i,\,j}a_{ij}^2}=|\lambda|\times\sqrt{\sum_{i,\,j}a_{ij}^2}=|\lambda|\times\|A\|$$

Considérons enfin deux matrices A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
On veut comparer $\|A+B\|$ et $\|A\|+\|B\|$. La norme considérée faisant intervenir une racine carrée, nous allons comparer en fait $\|A+B\|^2$ et $\left(\|A\|+\|B\|\right)^2$.

En reprenant les notations du préambule, on a : $\|A+B\|=\sqrt{\sum_{i,\,j}\left(a_{ij}+b_{ij}\right)^2}$.

D'où : $\|A+B\|^2=\sum_{i,\,j}\left(a_{ij}+b_{ij}\right)^2=\sum_{i,\,j}a_{ij}^2+\sum_{i,\,j}b_{ij}^2+2\sum_{i,\,j}a_{ij}b_{ij}$.

Par ailleurs : $\|A\|+\|B\|=\sqrt{\sum_{i,\,j}a_{ij}^2}+\sqrt{\sum_{i,\,j}b_{ij}^2}$.

D'où : $\left(\|A\|+\|B\|\right)^2=\left(\sqrt{\sum_{i,j}a_{ij}^2}+\sqrt{\sum_{i,j}b_{ij}^2}\right)^2=\sum_{i,j}a_{ij}^2+\sum_{i,j}b_{ij}^2+2\sqrt{\sum_{i,j}a_{ij}^2}\times\sqrt{\sum_{i,j}b_{ij}^2}$.

Ainsi, comparer $\|A+B\|^2$ et $\left(\|A\|+\|B\|\right)^2$ revient à comparer $\sum_{i,j}a_{ij}b_{ij}$ et $\sqrt{\sum_{i,j}a_{ij}^2}\times\sqrt{\sum_{i,j}b_{ij}^2}$.

Si la somme $\sum_{i,j}a_{ij}b_{ij}$ est négative, on a immédiatement : $\sum_{i,j}a_{ij}b_{ij}\le\sqrt{\sum_{i,j}a_{ij}^2}\times\sqrt{\sum_{i,j}b_{ij}^2}$.

Supposons donc : $\sum_{i,j}a_{ij}b_{ij}\ge 0$. Dans ce cas, nous pouvons encore comparer les carrés :

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{\sum_{i,j}a_{ij}^2}\times\sqrt{\sum_{i,j}b_{ij}^2}\right)^2-\left(\sum_{i,j}a_{ij}b_{ij}\right)^2&=\sum_{i,j}a_{ij}^2\times\sum_{i,j}b_{ij}^2-\left(\sum_{i,j}a_{ij}b_{ij}\right)^2\\
&=\sum_{i,j,k,l}a_{ij}^2b_{kl}^2-\left(\sum_{i,j}a_{ij}^2b_{ij}^2+\sum_{(i,j)\neq(k,l)}a_{ij}b_{ij}a_{kl}b_{kl}\right)\\
&=\cancel{\sum_{i,j}a_{ij}^2b_{ij}^2}+\sum_{(i,j)\neq(k,l)}a_{ij}^2b_{kl}^2-\cancel{\sum_{i,j}a_{ij}^2b_{ij}^2}-\sum_{(i,j)\neq(k,l)}a_{ij}b_{ij}a_{kl}b_{kl}\\
&=\sum_{(i,j)\neq(k,l)}\left(a_{ij}b_{kl}-a_{kl}b_{ij}\right)^2
\end{aligned}$$

Ainsi, on a : $\left(\sqrt{\sum_{i,j}a_{ij}^2}\times\sqrt{\sum_{i,j}b_{ij}^2}\right)^2-\left(\sum_{i,j}a_{ij}b_{ij}\right)^2=\sum_{(i,j)\neq(k,l)}\left(a_{ij}b_{kl}-a_{kl}b_{ij}\right)^2\ge 0$.

On en déduit alors : $\left(\sum_{i,j}a_{ij}b_{ij}\right)^2\le\left(\sqrt{\sum_{i,j}a_{ij}^2}\times\sqrt{\sum_{i,j}b_{ij}^2}\right)^2$ puis : $\sum_{i,j}a_{ij}b_{ij}\le\sqrt{\sum_{i,j}a_{ij}^2}\times\sqrt{\sum_{i,j}b_{ij}^2}$.

Dans tous les cas, on a donc : $\sum_{i,j}a_{ij}b_{ij}\le\sqrt{\sum_{i,j}a_{ij}^2}\times\sqrt{\sum_{i,j}b_{ij}^2}$ et on en déduit :

$$\|A+B\|^2\le\left(\|A\|+\|B\|\right)^2$$

Finalement, on a l'inégalité triangulaire : $\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$.

On déduit des résultats précédents que $\|\ \|$ est bien une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\boxed{\|\ \| \text{ est une norme sur } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$$

Question 2.

Soit A et B deux matrices dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Posons $C=\left(c_{ij}\right)=AB$.

On a : $\|C\|^2 = \sum_{i,\,j} c_{ij}^2 = \sum_{i,\,j}\left(\sum_k a_{ik}b_{kj}\right)^2$.

Soit alors *i* et *j* fixés.

Montrons que l'on a : $\left(\sum_k a_{ik}b_{kj}\right)^2 \le \sum_k a_{ik}^2 \times \sum_l b_{lj}^2$.

On a, par exemple :

$$\begin{aligned}
\sum_k a_{ik}^2 \times \sum_l b_{lj}^2 - \left(\sum_k a_{ik}b_{kj}\right)^2 &= \sum_{k,\,l} a_{ik}^2 b_{lj}^2 - \sum_{k,\,l} a_{ik}b_{kj}a_{il}b_{lj} \\
&= \sum_{k\neq l} a_{ik}^2 b_{lj}^2 - \sum_{k\neq l} a_{ik}b_{kj}a_{il}b_{lj} \\
&= \sum_{k<l}\left(a_{ik}^2 b_{lj}^2 + a_{il}^2 b_{kj}^2\right) - 2\sum_{k<l} a_{ik}b_{kj}a_{il}b_{lj} \\
&= \sum_{k<l}\left(a_{ik}b_{lj} - a_{ik}b_{lj}\right)^2
\end{aligned}$$

Comme $\sum_{k<l}\left(a_{ik}b_{lj} - a_{ik}b_{lj}\right)^2 \ge 0$, on a bien : $\left(\sum_k a_{ik}b_{kj}\right)^2 \le \sum_k a_{ik}^2 \times \sum_l b_{lj}^2$.

Il vient alors :

$$\|C\|^2 = \sum_{i,\,j}\left(\sum_k a_{ik}b_{kj}\right)^2 \le \sum_{i,\,j}\left(\sum_k a_{ik}^2 \times \sum_l b_{lj}^2\right) = \sum_{i,\,k} a_{ik}^2 \times \sum_{l,\,j} b_{lj}^2 = \|A\|^2 \times \|B\|^2$$

On pouvait également considérer le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ $(\ |\ )$ en posant $a = \left(a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}\right)$ et $b = \left(b_{1j}, b_{2j}, ..., b_{nj}\right)$:

$$\sum_k a_{ik}b_{kj} = (a\,|\,b)$$

Dans ces conditions, l'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit : $(a\,|\,b)^2 \le \|a\|^2 \times \|b\|^2$, c'est-à-dire :

$$\left(\sum_k a_{ik}b_{kj}\right)^2 \le \sum_k a_{ik}^2 \times \sum_l b_{lj}^2$$

C'est l'égalité cherchée.

Finalement :

$$\boxed{\|A.B\| \le \|A\| \times \|B\|}$$

Cette deuxième propriété fait de $\|\ \ \|$ une norme matricielle. Il s'agit de la norme de Frobenius.