Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ ($\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), on définit $\| \ \|_\infty$ comme suit :

$$\text{pour tout } M=(m_{ij}),\ \|M\|_\infty=\sup_{i,\,j}|m_{ij}|$$

1. Montrer que $\| \ \|_\infty$ est une norme.
2. Montrer que : $\forall (A,B)\in(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2, \|A.B\|_\infty \le n\times\|A\|_\infty\times\|B\|_\infty$.

Analyse

Un exercice classique qui permet de s'entraîner un peu à la manipulation des « sup » …

Résolution

Question 1.

On a immédiatement : $\forall M=(m_{ij})\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), |m_{ij}|\ge 0$. D'où $\sup_{i,j}|m_{ij}|=\|M\|_\infty\ge 0$.

Par ailleurs, on a :

$$\begin{aligned}\|M\|_\infty=0 &\Leftrightarrow \sup_{i,j}|m_{ij}|=0\\ &\Leftrightarrow \forall(i,j)\in(⟦1;n⟧)^2, |m_{ij}|=0\\ &\Leftrightarrow \forall(i,j)\in(⟦1;n⟧)^2, m_{ij}=0\\ &\Leftrightarrow M=0\end{aligned}$$

Soit maintenant $\lambda\in\mathbb{K}$ et $M=(m_{ij})\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a : $\lambda M=(\lambda m_{ij})$.

Immédiatement : $\forall(i,j)\in(⟦1;n⟧)^2, |\lambda m_{ij}|=|\lambda|\times|m_{ij}|$, puis :

$$\|\lambda M\|_\infty=\sup_{i,j}|\lambda m_{ij}|=|\lambda|\times\sup_{i,j}|m_{ij}|=|\lambda|\times\|M\|_\infty$$

Enfin, on considère deux matrices $M = (m_{ij})$ et $P = (p_{ij})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On a : $M + P = (m_{ij} + p_{ij})$.

On a alors : $\forall (i, j) \in (\llbracket 1 ; n \rrbracket)^2, |m_{ij} + p_{ij}| \leq |m_{ij}| + |p_{ij}| \leq \sup_{i,j} |m_{ij}| + \sup_{i,j} |p_{ij}| = \|M\|_\infty + \|P\|_\infty$.

D'où : $\sup_{i,j} |m_{ij} + p_{ij}| \leq \|M\|_\infty + \|P\|_\infty$, c'est-à-dire : $\|M + P\|_\infty \leq \|M\|_\infty + \|P\|_\infty$.

L'inégalité triangulaire est ainsi vérifiée.

Les résultats précédents nous permettent de conclure :

$$\boxed{\| \ \|_\infty \text{ est une norme sur } \mathscr{M}_n(\mathbb{K}).}$$

Question 2.

On considère deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On a : $AB = C = (c_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right)$.

On a alors :

$$\begin{aligned} \forall (i, j) \in (\llbracket 1 ; n \rrbracket)^2, |c_{ij}| = \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \right| &\leq \sum_{k=1}^{n} |a_{ik} b_{kj}| = \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \times |b_{kj}| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \sup_{i,j} |a_{ij}| \times \sup_{i,j} |b_{ij}| = \sum_{k=1}^{n} \|A\|_\infty \times \|B\|_\infty = n \times \|A\|_\infty \times \|B\|_\infty \end{aligned}$$

D'où : $\sup_{i,j} |c_{ij}| \leq n \times \|A\|_\infty \times \|B\|_\infty$, c'est-à-dire : $\|A.B\|_\infty \leq n \times \|A\|_\infty \times \|B\|_\infty$.

Le résultat est établi.

$$\boxed{\forall (A, B) = \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{K}))^2, \|A.B\|_\infty \leq n \times \|A\|_\infty \times \|B\|_\infty}$$