Soit (u_n) et (v_n) deux suites d'un espace vectoriel normé E telles que :

- (u_n) est une suite de Cauchy.
- $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0_{\mathrm{E}}$.

Montrer que (v_n) est une suite de Cauchy.

Analyse

On exploite chacune des hypothèses afin de montrer, via la définition, que la suite (v_n) est une suite de Cauchy. On n'hésite donc pas à manipuler des « ε » pour majorer classiquement la différence $\|v_m - v_p\|$ …

Résolution

Pour tous entiers naturels *m* et *p*, on a :

$$\|v_m - v_p\| = \|(v_m - u_m) + (u_m - u_p) + (u_p - v_p)\| \leq \|v_m - u_m\| + \|u_m - u_p\| + \|u_p - v_p\|$$

Soit alors ε un réel strictement positif.

La suite (u_n) étant une suite de Cauchy, il existe un entier naturel N_1 tel que :

$$\forall (m, p) \in \mathbb{N}^2, m \geq N_1 \text{ et } p \geq N_1 \Rightarrow \|u_m - u_p\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Par ailleurs, la suite $(u_n - v_n)$ convergeant vers 0_{E}, il existe un entier naturel N_2 tel que :

$$\forall q \in \mathbb{N}, q \geq N_2 \Rightarrow \|u_q - v_q\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

On déduit de ce qui précède que pour tous entiers *m* et *p* supérieurs à $N = \max(N_1, N_2)$, on a :

$$\|u_m - u_p\| \leq \frac{\varepsilon}{3},\ \|u_m - v_m\| \leq \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } \|u_p - v_p\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

D'où : $\left\|v_m - v_p\right\| \le \left\|v_m - u_m\right\| + \left\|u_m - u_p\right\| + \left\|u_p - v_p\right\| \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$.

En définitive, on a : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \,/\, \forall (m, p) \in \mathbb{N}^2, m \ge N$ et $p \ge N \Rightarrow \left\|v_m - v_p\right\| \le \varepsilon$.

La suite (v_n) est bien une suite de Cauchy.