

Déterminer l'intérieur de \mathbb{Q} .

Analyse

Une petite question de colle classique qui peut en entraîner bien d'autres !
L'intuition peut être bonne conseillère ... ou s'avérer très muette ! On peut dans ce cas revenir tranquillement à la définition de l'intérieur et se donner un élément de $\overset{\circ}{\mathbb{Q}}$.
On peut également s'intéresser au complémentaire de la partie cherchée et obtenir plus rapidement le résultat en utilisant un résultat classique de densité.

Résolution

Notons dans un premier temps que nous considérons ici \mathbb{Q} comme partie de \mathbb{R} .
 \mathbb{R} étant de dimension finie, nous pouvons en considérer n'importe quelle norme. Nous choisissons la norme euclidienne : $\forall x \in \mathbb{R}, \|x\| = |x|$.

Soit donc x un élément de $\overset{\circ}{\mathbb{Q}}$ (x est rationnel puisque $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{Q}$). Par définition de l'intérieur, il existe alors une boule ouverte centrée en x et incluse dans \mathbb{Q} :

$$\exists r > 0 / \mathcal{B}(x; r) \subset \mathbb{Q}$$

Concrètement, cette boule est ici l'intervalle ouvert : $]x - r; x + r[$.

Or, une telle boule ne peut être incluse dans \mathbb{Q} puisqu'elle contient au moins un irrationnel (en effet, rappelons qu'on peut trouver un rationnel dans $]x; x + r[$ en considérant le

rationnel : $x + \frac{|x|}{n}$ où n est un entier naturel non nul tel que $\frac{|x|}{n} < r$. On a alors :

$x < x + \frac{|x|}{n} < x + r$. Ensuite, entre x et $x + \frac{|x|}{n}$, on a un irrationnel de la forme $x + \frac{\pi}{m}$ où m est

un entier naturel tel que $\frac{\pi}{m} < \frac{|x|}{n}$. En définitive on a : $x < x + \frac{\pi}{m} < x + \frac{|x|}{n} < x + r$).

Ainsi, on ne peut considérer d'élément x de $\overset{\circ}{\mathbb{Q}}$. Cette partie est vide !

Si on s'intéresse au complémentaire de $\overset{\circ}{\mathbb{Q}}$, on a :

$$\complement_{\mathbb{R}} \overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \overline{\complement_{\mathbb{R}} \mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$$

Rappelons en effet les résultats classiques : $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ (les rationnels et les irrationnels sont denses dans \mathbb{R}).

Comme $\overset{\circ}{\mathbb{C}}_{\mathbb{R}} \overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, on a immédiatement : $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$.

Résultat final

$$\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$$