On considère un espace métrique E.
Soit A une partie de E. On note $\complement_E A$ la partie complémentaire de A dans E.

1. Montrer que A et $\complement_E A$ ont la même frontière.
2. Montrer que A est une partie ouverte et fermée de E si, et seulement si, sa frontière est vide.

Analyse

Deux résultats classiques et simples autour de la notion de frontière d'une partie.

Dans la première question, on utilise la définition de la frontière comme intersection de deux adhérences (celle de A et celle de son complémentaire). On en mesure ainsi la nature symétrique (au sens ensembliste du terme) et le résultat s'obtient immédiatement.

Dans la seconde question, on utilise plutôt la définition « classique » de la frontière qui fait intervenir l'intérieur de A.

Résolution

Question 1.

Rappelons que l'on a, pour toute partie de E :

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap \complement_E \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap \overline{\complement_E A}$$

En considérant la partie complémentaire de A, on obtient :

$$\mathrm{Fr}(\complement_E A) = \overline{\complement_E A} \cap \overline{\complement_E (\complement_E A)} = \overline{\complement_E A} \cap \overline{A} = \mathrm{Fr}(A)$$

Ainsi, toute partie de E et son complémentaire ont la même frontière.

Toute partie d'un espace métrique et son complémentaire ont la même frontière.

Question 2.

$\boxed{\Rightarrow}$

Nous supposons ici que A est une partie ouverte et fermée de E.

On a donc : $\overset{o}{A} = A = \overline{A}$ et $\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{o}{A} = A \setminus A = \varnothing$.

$\boxed{\Leftarrow}$

Réciproquement, supposons que l'on ait : $\mathrm{Fr}(A) = \varnothing$.

Comme $\overline{A} = \overset{o}{A} \cup \mathrm{Fr}(A)$, il vient $\overline{A} = \overset{o}{A}$.

Comme $\overset{o}{A} \subset A \subset \overline{A}$, l'égalité $\overline{A} = \overset{o}{A}$ nous donne immédiatement $\overset{o}{A} = A = \overline{A}$ et le résultat cherché.

Une partie d'un espace métrique est ouverte et fermée si, et seulement si, sa frontière est vide.