Déterminer :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2e^x+5}{-3e^x-7} \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x+5}{-3e^x-7}$$

Analyse

L'exercice requiert de bien connaître le comportement de l'exponentielle en $-\infty$ et en $+\infty$.

Résolution

On a $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ et donc : $\lim_{x\to-\infty} \left(2e^x+5\right) = 5$ et $\lim_{x\to-\infty} \left(-3e^x-7\right) = -7$.

D'où, finalement :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \frac{2e^x+5}{-3e^x-7} = \frac{5}{-7}}$$

On a : $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et donc : $\lim_{x\to+\infty} \left(2e^x+5\right) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \left(-3e^x-7\right) = -\infty$.

Pour ce qui est de la deuxième limite, on a donc affaire à une forme indéterminée du type « $\frac{\infty}{\infty}$ » (au signe près).

Mais au numérateur et au dénominateur, c'est l'exponentielle qui conduit à une limite infinie.
En factorisant, il vient alors :

$$\frac{2e^x+5}{-3e^x-7} = \frac{e^x\left(2+\frac{5}{e^x}\right)}{e^x\left(-3-\frac{7}{e^x}\right)} = \frac{2+\frac{5}{e^x}}{-3-\frac{7}{e^x}}$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, il vient : $\lim_{x\to+\infty} \frac{5}{e^x} = 0^+$ et $\lim_{x\to+\infty} \left(-\frac{7}{e^x}\right) = 0^-$.

Finalement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{2e^x+5}{-3e^x-7} = \frac{2}{-3}}$$

Résultat final

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2e^x + 5}{-3e^x - 7} = -\frac{5}{7} \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{2e^x + 5}{-3e^x - 7} = -\frac{2}{3}$$