Déterminer :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-4,21xe^x\right) \text{ et } \lim_{x\to+\infty}\left(-4,21xe^x\right)$$

Analyse

L'une des deux limites est simple. L'autre, moins évidente, requiert un changement de variable pour pouvoir se ramener à une limite connue.

Résolution

On a : $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

On en déduit donc : $\lim_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(-4,21xe^x\right) = -\infty$.

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(-4,21xe^x\right) = -\infty}$$

La limite en $-\infty$ est moins immédiate puisque l'on a : $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$.

On a donc affaire à une forme indéterminée du type « $0\times\infty$ ».

Puisque l'on travaille au voisinage de $-\infty$, on peut poser $X = -x$.

On a alors :

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-4,21xe^x\right) = \lim_{X\to+\infty}\left(-4,21(-X)e^{-X}\right) = \lim_{X\to+\infty}\left(4,21Xe^{-X}\right) = \lim_{X\to+\infty}\left(4,21\frac{X}{e^X}\right)$$

Or, on a le résultat classique : $\lim_{X\to+\infty}\frac{X}{e^X} = 0^+$.

Il vient donc : $\lim_{X\to+\infty}\left(4,21\frac{X}{e^X}\right) = 0^+$.

Finalement :

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(-4,21xe^x\right) = 0^+}$$

Résultat final

$$\lim_{x\to-\infty}\left(-4,21xe^{x}\right)=0^{+} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\left(-4,21xe^{x}\right)=-\infty$$