

On place un capital donné K pendant un an au taux de 9%.

On obtient un nouveau capital K' .

A quel taux trimestriel faudrait-il placer K , les intérêts étant composés chaque trimestre, pour obtenir le même capital K' au bout d'un an ?

Analyse

Les compositions trimestrielles successives s'expriment mathématiquement sous forme d'une puissance. L'égalité des capitaux obtenus dans les deux situations permet d'obtenir le taux.

Résolution

Notons t le taux (sous la forme d'un pourcentage) cherché.

Dans la première situation, on a la relation simple : $K' = \left(1 + \frac{9}{100}\right) \times K = 1,09K$

Dans la seconde situation, le capital s'accroît trimestre après trimestre :

- A la fin du premier trimestre, K a été multiplié par $1 + \frac{t}{100}$ et c'est le nouveau capital ainsi obtenu, $\left(1 + \frac{t}{100}\right)K$, qui porte intérêt ;
- A la fin du second trimestre, le capital obtenu vaut :
 $\left(1 + \frac{t}{100}\right)K \times \left(1 + \frac{t}{100}\right) = \left(1 + \frac{t}{100}\right)^2 K$.
- A la fin du troisième trimestre, il vaut : $\left(1 + \frac{t}{100}\right)^3 K$;
- Et à la fin du quatrième, c'est à dire au bout d'un an : $\left(1 + \frac{t}{100}\right)^4 K$.

Si l'on souhaite que les capitaux obtenus dans les deux situations soient égaux, le taux t doit

vérifier : $1,09K = \left(1 + \frac{t}{100}\right)^4 K$, soit : $1,09 = \left(1 + \frac{t}{100}\right)^4$.

On se « débarrasse » classiquement de la puissance : $1 + \frac{t}{100} = 1,09^{\frac{1}{4}}$.

D'où, finalement :

$$t = 100 \times \left(1,09^{\frac{1}{4}} - 1 \right)$$

On obtient : $t \simeq 2,18$ à 10^{-2} près.

Résultat final

Placer un capital pendant un an à 9% équivaut à le placer à un taux trimestriel d'environ 2,18% (à 10^{-2} près) pendant 4 trimestres, les intérêts étant composés chaque trimestre.