Résoudre l'inéquation :

$$\frac{5e^{2x}-16e^{x}+19}{e^{2x}-12e^{x}+11}\geq 2$$

Analyse

Dans un premier temps, la présence d'une fraction nous conduit à rechercher d'éventuelles valeurs « interdites » de l'inconnue.
Ensuite, il convient de se débarrasser de la fraction en se montrant rigoureux(se).

Résolution

Recherchons, dans un premier temps, les éventuelles valeurs de x qui annulent le dénominateur.
On cherche donc à résoudre l'équation : $e^{2x}-12e^{x}+11=0$.
Posons : $X=e^{x}$.
On est alors ramené à l'équation du second degré suivante : $X^{2}-12X+11=0$.

$\Delta=12^{2}-4\times 11=144-44=100=10^{2}$
D'où : $X_1=\frac{12-10}{2}=\frac{2}{2}=1$ et $X_1=\frac{12+10}{2}=\frac{22}{2}=11$.
On résout alors :
$e^{x}=X_1=1$ qui donne $x=\ln 1=0$
$e^{x}=X_2=11$ qui donne $x=\ln 11$

On va donc chercher x dans l'ensemble : $\mathcal{D}=\mathbb{R}-\{0;\ln 11\}$.

Afin de se débarrasser de la fraction, nous souhaitons multiplier chaque membre de l'inéquation par $e^{2x}-12e^{x}+11$.
D'après ce qui précède, cette expression peut être, suivant la valeur de x dans $\mathcal{D}$, strictement négative ou strictement positive. Comme nous avons affaire à une inéquation, le signe de cette expression importe !

1er cas : $x\in\left]-\infty\,;0\right[\cup\left]\ln 11\,;+\infty\right[$

On a alors : $e^{2x}-12e^{x}+11>0$.
L'inéquation de départ équivaut alors à : $5e^{2x}-16e^{x}+19\geq 2\left(e^{2x}-12e^{x}+11\right)$.

Soit : $5e^{2x}-16e^{x}+19\geq 2e^{2x}-24e^{x}+22$
D'où, finalement : $3e^{2x}+8e^{x}-3\geq 0$

En posant $X=e^{x}$, on se ramène à une inéquation du second degré : $3X^{2}+8X-3\geq 0$.

On commence par résoudre : $3X^{2}+8X-3=0$.
On a : $\Delta=8^{2}-4\times 3\times(-3)=64+36=100=10^{2}$.
Il vient alors : $X_{1}=\dfrac{-8-10}{2\times 3}=\dfrac{-18}{6}=-3$ et $X_{1}=\dfrac{-8+10}{2\times 3}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.

On a donc : $3X^{2}+8X-3=3(X+3)\left(X-\dfrac{1}{3}\right)=(X+3)(3X-1)$.
D'où : $3e^{2x}+8e^{x}-3=\left(e^{x}+3\right)\left(3e^{x}-1\right)$

L'inéquation $3e^{2x}+8e^{x}-3\geq 0$ équivaut donc à : $\left(e^{x}+3\right)\left(3e^{x}-1\right)\geq 0$.

Pour tout x réel, on a : $e^{x}>0$ et donc $e^{x}+3>0$.
Le signe de $\left(e^{x}+3\right)\left(3e^{x}-1\right)$ est donc celui de $3e^{x}-1$.
$\left(e^{x}+3\right)\left(3e^{x}-1\right)\geq 0$ équivaut donc à $3e^{x}-1\geq 0$.

$3e^{x}-1\geq 0$ équivaut à $e^{x}\geq\dfrac{1}{3}$, soit : $x\geq\ln\dfrac{1}{3}$ ou, finalement $x\geq -\ln 3$.

Puisque nous nous étions placé dans l'ensemble $]-\infty\,;0[\cup]\ln 11\,;+\infty[$ et que $-\ln 3<0$, il vient finalement :

Dans $]-\infty\,;0[\cup]\ln 11\,;+\infty[$, on a $\dfrac{5e^{2x}-16e^{x}+19}{e^{2x}-12e^{x}+11}\geq 2$ pour $[-\ln 3\,;0[\cup]\ln 11\,;+\infty[$.

2ème cas : $x\in\,]0\,;\ln 11[$

Cette fois, on a : $e^{2x}-12e^{x}+11<0$.
L'inéquation de départ équivaut alors à : $5e^{2x}-16e^{x}+19\leq 2\left(e^{2x}-12e^{x}+11\right)$.
(l'inégalité est inversée puisque l'on a multiplié par une quantité négative)

On obtient finalement : $3e^{2x}+8e^{x}-3\leq 0$.
D'après ce qui a été fait au cas précédent, cette inégalité est vérifiée pour $3e^{x}-1\leq 0$, soit $x\leq -\ln 3$.

Mais nous travaillons dans l'intervalle $]0\,;\ln 11[$. On ne peut donc avoir $x\leq -\ln 3$.

→ Conclusion

L'inéquation $\frac{5e^{2x}-16e^{x}+19}{e^{2x}-12e^{x}+11}\geq 2$ est vérifiée pour tout x de $\left[-\ln 3\,;0\right[\cup\left]\ln 11\,;+\infty\right[$.

Résultat final

L'inéquation $\frac{5e^{2x}-16e^{x}+19}{e^{2x}-12e^{x}+11}\geq 2$ admet comme ensemble de solution :

$$\left[-\ln 3\,;0\right[\cup\left]\ln 11\,;+\infty\right[$$