Simplifier :

$$\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2$$

Analyse

On peut développer « froidement » les carrés ou penser à une identité remarquable …

Résolution

Nous développons les deux approches suggérées ci-dessus.

1ère approche

$$\begin{aligned}
\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 &= \frac{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}{2^2}-\frac{\left(e^x-e^{-x}\right)^2}{2^2}\\
&= \frac{1}{4}\left[\left(\left(e^x\right)^2+2e^xe^{-x}+\left(e^{-x}\right)^2\right)-\left(\left(e^x\right)^2-2e^xe^{-x}+\left(e^{-x}\right)^2\right)\right]\\
&= \frac{1}{4}\left[e^{2x}+2+e^{-2x}-\left(e^{2x}-2+e^{-2x}\right)\right]\\
&= \frac{1}{4}\left(e^{2x}+2+e^{-2x}-e^{2x}+2-e^{-2x}\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\cancel{e^{2x}}+2+\cancel{e^{-2x}}\cancel{-e^{2x}}+2\cancel{-e^{-2x}}\right)\\
&= \frac{1}{4}\times 4\\
&= \boxed{1}
\end{aligned}$$

2ème approche

Nous avons affaire à une différence de deux carrés. Nous pouvons donc utiliser l'identité remarquable correspondante :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 &= \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}+\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}-\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\\
&= \frac{e^x+\cancel{e^{-x}}+e^x\cancel{-e^{-x}}}{2}\times\frac{e^x+e^{-x}-\left(e^x-e^{-x}\right)}{2}\\
&= \frac{2e^x}{2}\times\frac{\cancel{e^x}+e^{-x}\cancel{-e^x}+e^{-x}}{2}\\
&= e^x\times\frac{2e^{-x}}{2}\\
&= e^x\times e^{-x}\\
&= \boxed{1}
\end{aligned}$$

Résultat final

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2-\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=1$$