Démontrer que pour tout x réel on a :

$$\frac{e^{2x}+e^{-x}}{e^{3x}+e^{2x}}=\frac{1+e^{-3x}}{1+e^{x}}$$

Analyse

Dans un premier temps, on peut s'assurer que le membre de gauche (par exemple) de cette égalité est bien défini pour tout x réel. Ensuite, on effectue au numérateur et au dénominateur une factorisation.

Résolution

Nous notons, dans un premier temps, que l'on a, pour tout x réel : $e^{3x}>0$ et $e^{2x}>0$. Le dénominateur de l'expression correspondant au membre de gauche de l'égalité est donc strictement positif. Cette expression est bien définie pour tout x réel.

On peut alors mettre, au numérateur et au dénominateur, e^{2x} (non nul pour tout x réel) en facteur et on obtient :

$$\frac{e^{2x}+e^{-x}}{e^{3x}+e^{2x}}=\frac{\cancel{e^{2x}}\left(1+\dfrac{e^{-x}}{e^{2x}}\right)}{\cancel{e^{2x}}\left(\dfrac{e^{3x}}{e^{2x}}+1\right)}=\frac{1+e^{-x-2x}}{e^{3x-2x}+1}=\frac{1+e^{-3x}}{e^{x}+1}=\frac{1+e^{-3x}}{1+e^{x}}$$

L'égalité est ainsi établie.

Résultat final

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \frac{e^{2x}+e^{-x}}{e^{3x}+e^{2x}}=\frac{1+e^{-3x}}{1+e^{x}}$$