1. Calculer :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3}$$

2. Pour tout réel x supérieur à 1, comparer :

$$\frac{e^{2x}}{x^3} \text{ et } \frac{e^{2x}}{x^2\sqrt{x}}$$

3. Utiliser les résultats précédents pour déterminer :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}-5}{x^2\sqrt{x}+2}$$

Analyse

Divers éléments de cours sont passés en revue dans cet exercice (croissance comparée, comparaison, …) pour obtenir un résultat probablement conforme à … votre intuition ?

Résolution

1. Pour pouvoir utiliser le théorème du cours (croissance comparée), il nous faut faire apparaître au dénominateur l'argument de l'exponentielle :

$$\frac{e^{2x}}{x^3} = \frac{e^{2x}}{\frac{1}{8}(2x)^3} = 8\frac{e^{2x}}{(2x)^3}$$

   Comme : $\lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty$, il vient : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{(2x)^3} = \lim_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X^3} = +\infty$ et, finalement :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} = +\infty}$$

2. Pour tout réel x supérieur à 1, on a, la fonction racine carrée étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$: $\sqrt{x} \geq 1$.

On en déduit, en multipliant par le réel positif $\sqrt{x}$: $x \geq \sqrt{x}$, soit, x étant non nul (puisque supérieur à 1) : $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$. On en tire alors : $\frac{1}{x^2} \times \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{\sqrt{x}}$, soit : $\frac{1}{x^3} \leq \frac{1}{x^2\sqrt{x}}$.

Finalement, l'exponentielle prenant des valeurs strictement positives : $\frac{e^{2x}}{x^3} \leq \frac{e^{2x}}{x^2\sqrt{x}}$.

$$\boxed{\forall x \in [1;+\infty[,\ \frac{e^{2x}}{x^3} \leq \frac{e^{2x}}{x^2\sqrt{x}}}$$

3. Pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\frac{e^{2x}-5}{x^2\sqrt{x}+2} = \frac{e^{2x}\left(1-\frac{5}{e^{2x}}\right)}{x^2\sqrt{x}\left(1+\frac{2}{x^2\sqrt{x}}\right)} = \frac{e^{2x}}{x^2\sqrt{x}} \times \frac{1-\frac{5}{e^{2x}}}{1+\frac{2}{x^2\sqrt{x}}}$$

D'après la question précédente, on a : $\forall x \in [1;+\infty[,\ \frac{e^{2x}}{x^3} \leq \frac{e^{2x}}{x^2\sqrt{x}}$. D'après la question 1, on a : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} = +\infty$. Par comparaison, on en déduit : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^2\sqrt{x}} = +\infty$ (1).

Par ailleurs, on a vu que : $\lim_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty$. On en tire immédiatement : $\lim_{x\to+\infty} \frac{5}{e^{2x}} = 0$ puis : $\lim_{x\to+\infty} \left(1-\frac{5}{e^{2x}}\right) = 0$ (2).

On a aussi : $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$. Par produit, il vient alors : $\lim_{x\to+\infty} x^2\sqrt{x} = +\infty$, puis : $\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2\sqrt{x}} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x^2\sqrt{x}}\right) = 0$ (3).

Les résultats (2) et (3) que nous venons d'obtenir donnent alors (rapport) :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{5}{e^{2x}}}{1+\frac{2}{x^2\sqrt{x}}} = 1$$

On en déduit finalement (produit) en tenant compte de (1) :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}-5}{x^2\sqrt{x}+2} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{e^{2x}}{x^2\sqrt{x}} \times \frac{1-\frac{5}{e^{2x}}}{1+\frac{2}{x^2\sqrt{x}}} \right) = +\infty}$$