On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x=-\frac{\pi}{2} \\ 5^{\tan x} & \text{si } x\in\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

1. Montrer que *f* est continue en $-\frac{\pi}{2}$.
2. Calculer la limite de *f* en $\frac{\pi}{2}$ (on interprètera graphiquement le résultat obtenu).
3. Montrer que *f* est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et donner $f'(x)$.
4. Montrer que la fonction *f* est dérivable en 0 (on effectuera le changement de variable $x=-\frac{\pi}{2}+h$ et on fera apparaître l'expression $\dfrac{1}{5^{\frac{1}{\tan h}}\tan h}$).
5. Donner les variations de *f*.
6. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de *f* dans un repère orthonormal.

Analyse

Divers éléments de cours sont passés en revue dans cet exercice (exponentielle de base a, croissance comparée, …). La question 3. est probablement la plus délicate comme souvent dans le cadre d'étude en un point.

Résolution

1. Pour tout réel *x* de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on a : $f(x)=5^{\tan x}=e^{\tan x\times\ln 5}$.

La fonction *f* est ainsi la composée de la fonction $x \mapsto \ln 5 \times \tan x$ et de la fonction exponentielle.

On a : $\ln 5 > 0$ et $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}, x > -\frac{\pi}{2}} \tan x = -\infty$ d'où : $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}, x > -\frac{\pi}{2}} (\ln 5 \times \tan x) = -\infty$.

Or, on a : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$. On en déduit alors, par composition : $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}, x > -\frac{\pi}{2}} f(x) = 0$.

Comme : $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}, x > -\frac{\pi}{2}} f(x) = 0 = f(0)$, on en déduit finalement :

La fonction *f* est continue en 0.

2. On a cette fois : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}, x < \frac{\pi}{2}} \tan x = +\infty$ d'où : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}, x < \frac{\pi}{2}} (\ln 5 \times \tan x) = +\infty$.

   Or, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. On en déduit alors, par composition :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}, x < \frac{\pi}{2}} f(x) = +\infty$$

   On déduit de ce résultat que la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction *f* admet une asymptote verticale d'équation $x = \frac{\pi}{2}$.

3. On a vu à la question 1. que la fonction *f* était la composée de la fonction $x \mapsto \ln 5 \times \tan x$ et de la fonction exponentielle.

   La fonction $x \mapsto \ln 5 \times \tan x$ est dérivable sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ car la fonction tangente l'est. La fonction tangente prend, sur cet intervalle, ses valeurs dans $\mathbb{R}$. Or, la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$. On en déduit ainsi que :

La fonction *f* est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

   Pour tout réel *x* de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, on a : $f(x) = 5^{\tan x} = e^{\tan x \times \ln 5}$.

   On en déduit (dérivation d'une fonction composée) :

$$f'(x) = \ln 5 \times (1 + \tan^2 x) \times e^{\tan x \times \ln 5} = \ln 5 \times (1 + \tan^2 x) \times 5^{\tan x}$$

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \ f'(x) = \ln 5 \times (1 + \tan^2 x) \times 5^{\tan x}$$

4. On doit déterminer : $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2},x>-\frac{\pi}{2}} \dfrac{f(x)-f\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{x-\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2},x>-\frac{\pi}{2}} \dfrac{f(x)}{x+\frac{\pi}{2}}$.

Comme le suggère l'énoncé, effectuons le changement de variable $x=-\frac{\pi}{2}+h$.

Lorsque x tend vers $-\frac{\pi}{2}$ par valeurs strictement supérieures, h tend vers 0 par valeurs strictement positives.

On a donc : $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2},x>-\frac{\pi}{2}} \dfrac{f(x)}{x+\frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{h\to0,h>0} \dfrac{f\left(-\frac{\pi}{2}+h\right)}{h}$.

Pour h strictement positif (tel que $-\frac{\pi}{2}+h<\frac{\pi}{2}$), on a, en tenant compte de $\sin\left(\frac{\pi}{2}-h\right)=\cos h$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}-h\right)=\sin h$:

$$f\left(-\frac{\pi}{2}+h\right)=5^{\tan\left(-\frac{\pi}{2}+h\right)}=5^{-\tan\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}=\frac{1}{5^{\tan\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}}=\frac{1}{5^{\frac{1}{\tan h}}}$$

On cherche donc ici : $\lim\limits_{h\to0,h>0} \dfrac{f\left(-\frac{\pi}{2}+h\right)}{h} = \lim\limits_{h\to0,h>0} \dfrac{\frac{1}{5^{\frac{1}{\tan h}}}}{h} = \lim\limits_{h\to0,h>0} \dfrac{1}{h\times5^{\frac{1}{\tan h}}}$

On a : $\dfrac{1}{h\times5^{\frac{1}{\tan h}}}=\dfrac{\tan h}{h}\times\dfrac{1}{\tan h\times5^{\frac{1}{\tan h}}}=\dfrac{1}{\cos h}\times\dfrac{\sin h}{h}\times\dfrac{1}{\tan h\times5^{\frac{1}{\tan h}}}$.

On a immédiatement : $\lim\limits_{h\to0,h>0}\dfrac{1}{\cos h}=\dfrac{1}{\cos 0}=\dfrac{1}{1}=1$ et $\lim\limits_{h\to0,h>0}\dfrac{\sin h}{h}=1$.

Pour calculer $\lim\limits_{h\to0,h>0}\left(\tan h\times5^{\frac{1}{\tan h}}\right)$, nous pouvons effectuer le changement de variable $X=\dfrac{1}{\tan h}$. Quand h tend vers 0 par valeurs strictement positives, X tend vers $+\infty$.
On a donc :

$$\lim_{h\to0,h>0}\left(\tan h\times5^{\frac{1}{\tan h}}\right)=\lim_{X\to+\infty}\frac{5^X}{X}=\lim_{X\to+\infty}\frac{e^{X\ln5}}{X}=\lim_{X\to+\infty}\left(\ln5\times\frac{e^{X\ln5}}{X\ln5}\right)$$

Or, en posant $Y=X\ln5$: $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{e^{X\ln5}}{X\ln5}=\lim\limits_{Y\to+\infty}\dfrac{e^Y}{Y}=+\infty$ (cf. cours sur les croissances comparées).

Finalement : $\lim\limits_{h\to 0, h>0}\left(\tan h\times 5^{\frac{1}{\tan h}}\right)=+\infty$ et donc : $\lim\limits_{h\to 0, h>0}\dfrac{1}{\tan h\times 5^{\frac{1}{\tan h}}}=0$.

En définitive :

$$\lim_{h\to 0, h>0}\frac{f\left(-\frac{\pi}{2}+h\right)}{h}=\lim_{h\to 0, h>0}\frac{1}{h\times 5^{\frac{1}{\tan h}}}=0$$

> La fonction *f* est donc dérivable (à droite) en $-\dfrac{\pi}{2}$ et on a : $f'\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$.

5. D'après la question 3., on a : $\forall x\in\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$, $f'(x)=\ln 5\times\left(1+\tan^2 x\right)\times 5^{\tan x}$.

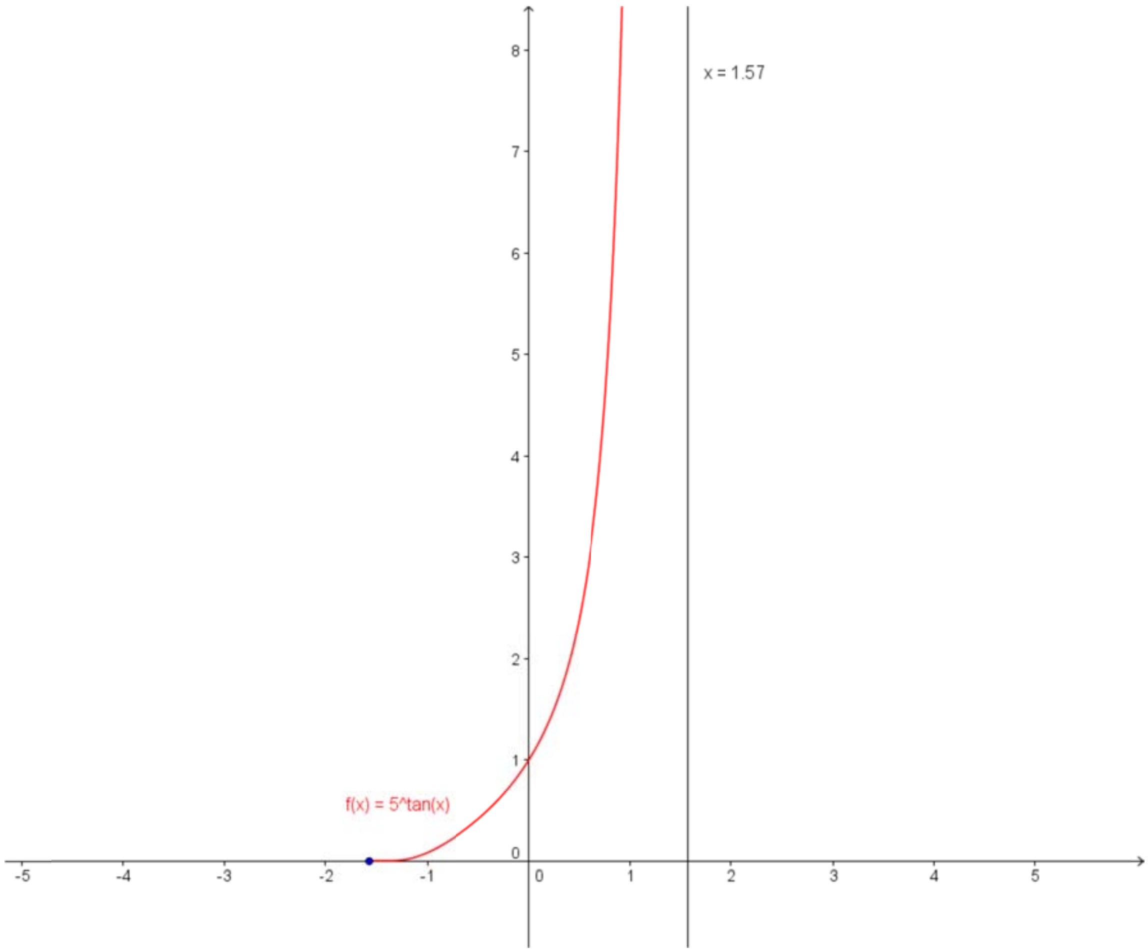
   Les trois facteurs apparaissant dans l'expression de $f'(x)$ sont strictement positifs. On en déduit que la dérivée de la fonction *f* est strictement positive sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

   Par ailleurs, d'après la question précédente, la dérivée de la fonction *f* s'annule en $-\dfrac{\pi}{2}$.

   Finalement :

> La fonction *f* est strictement croissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

6. On obtient :



Courbe représentative de la fonction $x \mapsto 5^{\tan x}$ *pour x dans* $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.