On considère la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = 3^{\frac{\ln x}{x}}$$

1. Déterminer la fonction dérivée de la fonction *f*.
2. En déduire les variations de *f*.

Analyse

Le calcul est assez simple (dérivée d'une fonction composée) et l'étude du signe de la fonction dérivée ne requiert que quelques connaissances relatives au logarithme népérien.

Résolution

1. La fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme rapport de deux fonctions définies et dérivables sur cet intervalle. Elle prend par ailleurs ses valeurs dans $\mathbb{R}$.
   La fonction $x \mapsto 3^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (exponentielle de base 3. Cf. le cours).
   On en déduit que la fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Pour tout *x* réel strictement positif, il vient alors, en partant de $3^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}\ln 3}$:

$$f'(x) = \ln 3 \times \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2} \times e^{\frac{\ln x}{x}\ln 3} = \ln 3 \times \frac{1 - \ln x}{x^2} \times 3^{\frac{\ln x}{x}}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \ln 3 \times \frac{1 - \ln x}{x^2} \times 3^{\frac{\ln x}{x}}}$$

2. Pour tout *x* réel strictement positif, on a : $\ln 3 \times \frac{3^{\frac{\ln x}{x}}}{x^2} > 0$.

   On en déduit que le signe de $f'(x)$ est identique à celui de $1 - \ln x$.

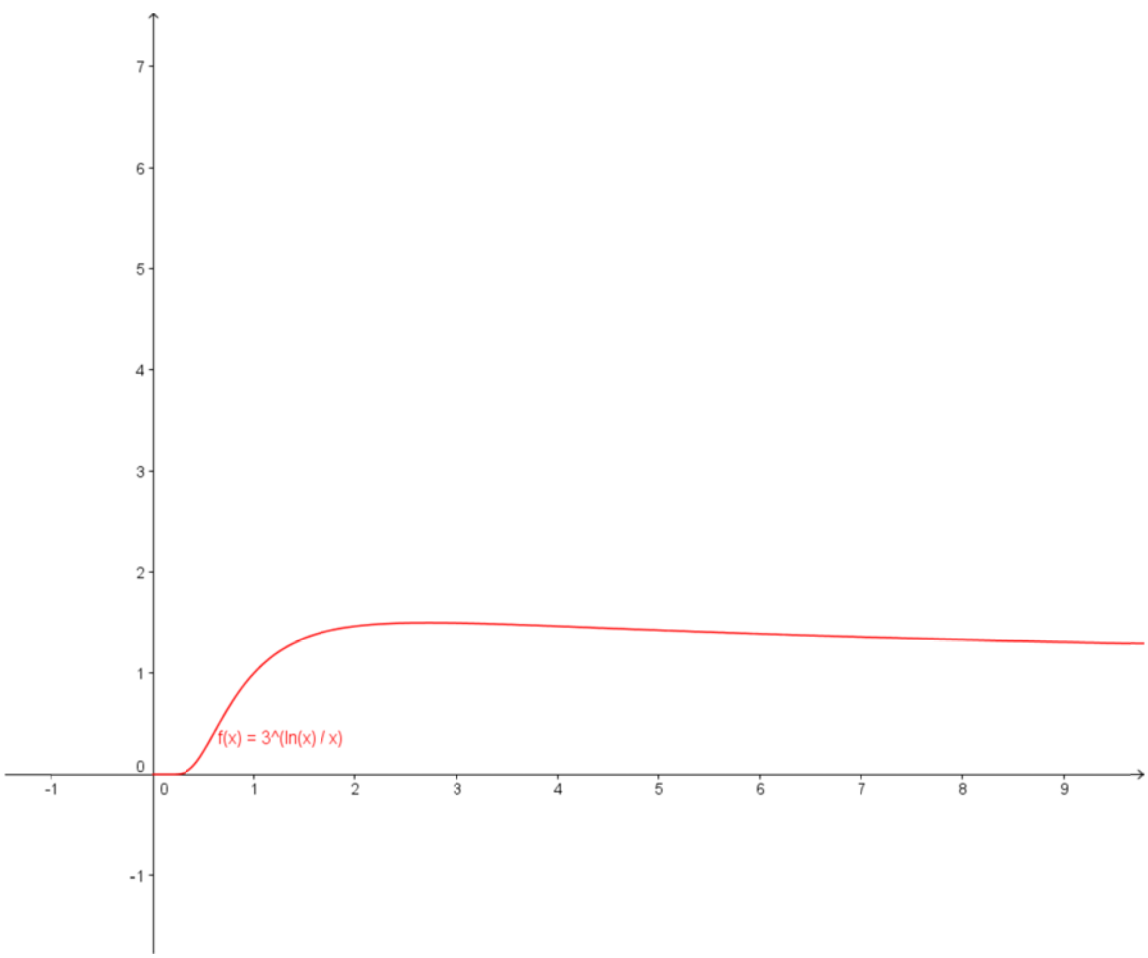
En tenant compte de $\ln e = 1$ et du fait que la fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, il vient :

- Sur $]0;e[$, $f'(x) > 0$ et la fonction *f* est strictement croissante ;
- $f'(e) = 0$;
- Sur $]e;+\infty[$, $f'(x) < 0$ et la fonction *f* est strictement décroissante.

En définitive :

Sur l'intervalle $]0;e]$ la fonction *f* est strictement croissante et sur l'intervalle $[e;+\infty[$ elle est strictement décroissante.

En guise de complément, nous fournissons la courbe représentative de *f* :



Courbe représentative de la fonction $x \mapsto 3^{\frac{\ln x}{x}}$.