

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par :

$$f(x) = x^{\sqrt{x}} - \sqrt{x}^x$$

Déterminer les limites de la fonction f en 0 (à droite) et en $+\infty$.

Analyse

On peut d'emblée utiliser l'écriture exponentielle (c'est l'approche que nous proposons). On peut également remarquer que pour tout réel x strictement positif, on a : $x = \sqrt{x}^2$.

Résolution

Pour tout réel x strictement positif, on a : $f(x) = x^{\sqrt{x}} - \sqrt{x}^x = e^{\sqrt{x} \ln x} - e^{x \ln \sqrt{x}} = e^{\sqrt{x} \ln x} - e^{\frac{1}{2} x \ln x}$.

On a la limite classique : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x \ln x) = 0$.

Il vient alors : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{1}{2} x \ln x \right) = 0$, puis, par composition : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{\frac{1}{2} x \ln x} = 1$.

On a ensuite : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (\sqrt{x} \ln x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\sqrt{x} \ln (\sqrt{x})^2 \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (2\sqrt{x} \ln \sqrt{x}) = \lim_{\substack{X \rightarrow 0 \\ X > 0}} (2X \ln X) = 0$.

D'où, par composition : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} e^{\sqrt{x} \ln x} = 1$.

Par différence, il vient finalement :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0$$

En $+\infty$, on peut facilement comparer les comportements des fonctions $x \mapsto \frac{1}{2}x$ et $x \mapsto \sqrt{x}$.

D'où la factorisation :

$$f(x) = e^{\sqrt{x} \ln x} - e^{\frac{1}{2} x \ln x} = e^{\frac{1}{2} x \ln x} \left[e^{\sqrt{x} \ln x - \frac{1}{2} x \ln x} - 1 \right] = e^{\frac{1}{2} x \ln x} \left[e^{\left(\sqrt{x} - \frac{1}{2} x \right) \ln x} - 1 \right] = e^{\frac{1}{2} x \ln x} \left[e^{\frac{1}{2} x \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1 \right) \ln x} - 1 \right]$$

On a immédiatement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1 \right) = 0 - 1 = -1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} x \ln x \right) = +\infty$.

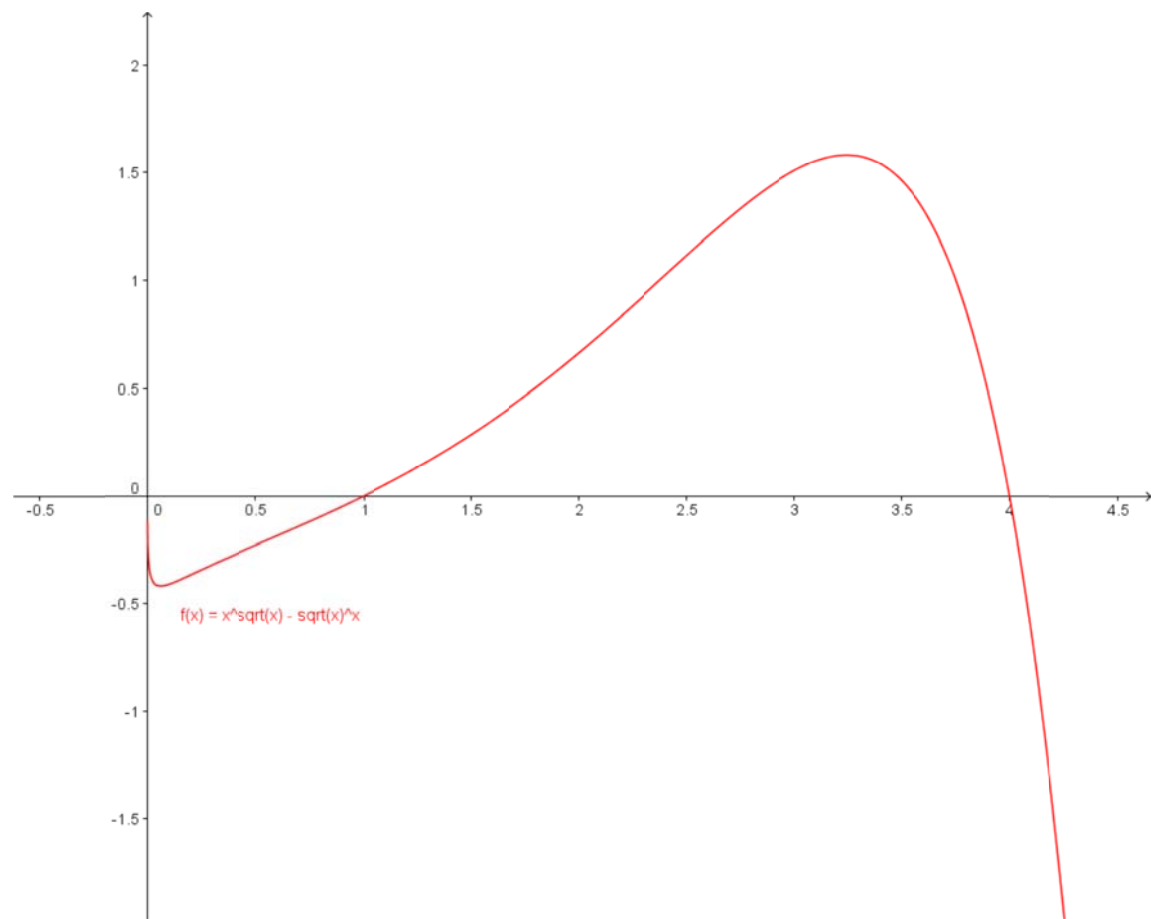
On en déduit :

- Par composition : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{2} x \ln x} = +\infty$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} x \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1 \right) \ln x \right) = -\infty$ puis, par composition : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{2} x \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1 \right) \ln x} = 0$ et, enfin :
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e^{\frac{1}{2} x \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1 \right) \ln x} - 1 \right) = -1$$

Il vient alors, par produit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

En guise de complément, nous fournissons la courbe représentative de f :



Courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^{\sqrt{x}} - \sqrt{x}^x$.

Résultat final

Pour la fonction f définie sur \mathbb{R}_+^* par $f(x) = x^{\sqrt{x}} - \sqrt{x}^x$, on a :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$