Calculer les limites en 0 (à gauche et à droite), en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=\frac{1}{5}e^{\frac{\sin(5x)}{x^2}}$$

Donner une interprétation géométrique des résultats obtenus.

## Analyse

L'exercice fait appel à quelques limites classiques de l'exponentielle et requiert de connaître la limite de $\frac{\sin x}{x}$ en 0.

## Résolution

On écrit, pour tout $x$ réel non nul :

$$\frac{\sin(5x)}{x^2}=\frac{5}{x}\times\frac{\sin(5x)}{5x}$$

En tenant compte de $\lim\limits_{x\to 0} 5x=0$ et de $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ il vient (composition) : $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x}=1$.

En tenant compte ensuite de $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{5}{x}=-\infty$, il vient (produit) :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sin(5x)}{x^2}=-\infty$$

Par ailleurs, on a la limite classique (cours) : $\lim\limits_{x\to -\infty} e^x=0$.

On en déduit alors (composition) :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=0}$$

On procède de façon analogue à droite de 0.

On a cette fois : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{5}{x} = +\infty$ et donc :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sin(5x)}{x^2} = +\infty$$

On a la limite classique (cours) : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

On en déduit alors (toujours par composition) :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty}$$

Le premier résultat nous indique que la fonction *f* peut être prolongée par continuité à gauche en 0. La courbe représentative de la fonction *f* admet donc en 0 à gauche un point limite qui est simplement l'origine

D'après le second résultat, la courbe représentative de la fonction *f* admet une asymptote verticale d'équation : $x = 0$.

Pour les limites en $-\infty$ et en $+\infty$, on effectue deux remarques :

- On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ ;
- Pour tout *x* réel non nul : $-\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin(5x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$.

On a alors : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

Le théorème des gendarmes nous permet alors d'écrire : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sin(5x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin(5x)}{x^2} = 0$.

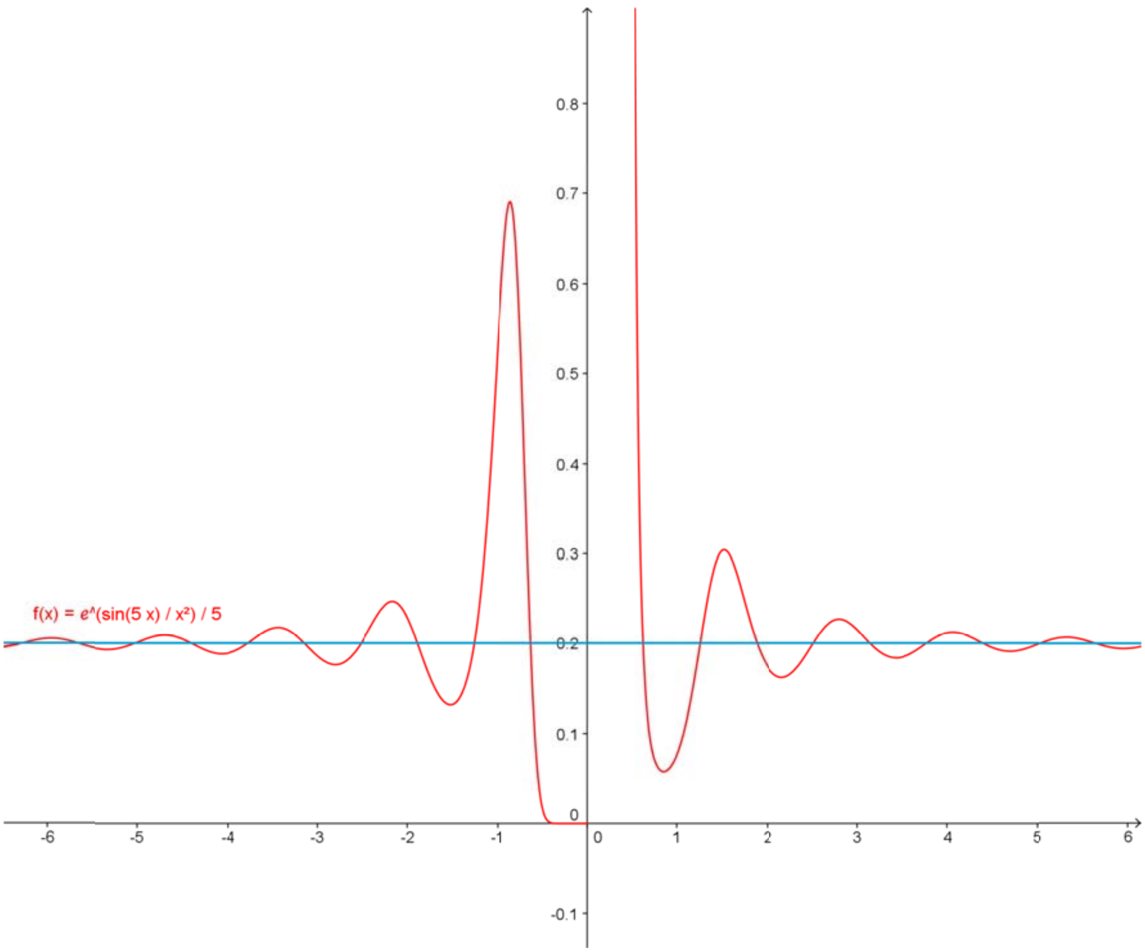
Enfin il vient (par composition) :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{5}e^0 = \frac{1}{5}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{5}}$$

La courbe représentative de la fonction *f* admet une asymptote horizontale d'équation : $y = \frac{1}{5}$.

En guise de complément, nous fournissons la courbe représentative de *f* :




*Courbe représentative de la fonction* $x \mapsto \frac{1}{5} e^{\frac{\sin(5x)}{x^2}}$.

## Résultat final

Pour la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{5} e^{\frac{\sin(5x)}{x^2}}$, on a :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = 0$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{5}$$