Résoudre :

$$x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{x}$$

Analyse

Chaque membre de l'égalité est défini pour tout réel x strictement positif. En utilisant les écritures exponentielles, l'équation ne pose pas de difficulté particulière.

Résolution

Pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\begin{aligned}
& x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{x} \\
\Leftrightarrow\ & \exp\left(\sqrt{x} \times \ln x\right) = \exp\left(x \times \ln \sqrt{x}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \exp\left(\sqrt{x} \times \ln x\right) = \exp\left(\frac{1}{2} x \times \ln x\right) \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{x} \times \ln x = \frac{1}{2} x \times \ln x \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{x} \times \ln x - \frac{1}{2} x \times \ln x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{2}\sqrt{x} \times \ln x \times \left(2 - \sqrt{x}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \ln x = 0 \text{ ou } \sqrt{x} = 2 \\
\Leftrightarrow\ & x = 1 \text{ ou } x = 4
\end{aligned}$$

Résultat final

L'équation $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{x}$ admet donc comme solutions : 1 et 4.