

Soit a et b deux réels strictement positifs tels que : $0 < a < b$.

Montrer que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, ae^{-bx} - be^{-ax} > a - b$$

Analyse

Une manipulation simple de l'inégalité proposée permet de ramener le problème à celui de la monotonie stricte d'une certaine fonction ...

Résolution

Soit donc a et b deux réels strictement positifs tels que $0 < a < b$. Leur produit est également strictement positif et pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\begin{aligned} & ae^{-bx} - be^{-ax} > a - b \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{ab}(ae^{-bx} - be^{-ax}) > \frac{1}{ab}(a - b) \\ \Leftrightarrow & \frac{e^{-bx}}{b} - \frac{e^{-ax}}{a} > \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \\ \Leftrightarrow & \frac{e^{-bx}}{b} - \frac{1}{b} > \frac{e^{-ax}}{a} - \frac{1}{a} \end{aligned}$$

Soit alors x un réels strictement positif quelconque fixé.

On considère la fonction φ , définie sur \mathbb{R}_+^* , par :

$$\varphi : t \mapsto \varphi(t) = \frac{e^{-xt}}{t} - \frac{1}{t} = \frac{1}{t}(e^{-xt} - 1)$$

La fonction φ est dérivable sur l'intervalle \mathbb{R}_+^* comme produit de deux fonctions qui y sont elles-mêmes dérivables. Pour tout réel t strictement positif, on a :

$$\varphi'(t) = -\frac{1}{t^2}(e^{-xt} - 1) + \frac{1}{t} \times (-x)e^{-xt} = -\frac{1}{t^2}(e^{-xt} - 1 + xt e^{-xt}) = -\frac{1}{t^2}\Phi(t)$$

La fonction Φ est définie et continue sur \mathbb{R} et on a facilement : $\Phi(0) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \Phi(t) = 0$.

Par ailleurs, elle est dérivable sur \mathbb{R} (et donc, à fortiori, sur \mathbb{R}_+^*) en tant que somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout réel t , on a :

$$\Phi'(t) = -xe^{-xt} - 0 + xe^{-xt} - x^2 t e^{-xt} = -x^2 t e^{-xt}$$

Ainsi, pour tout réel t strictement positif, on a : $\Phi'(t) < 0$. La fonction Φ est ainsi strictement décroissante sur \mathbb{R}_+^* . Comme $\Phi(0) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \Phi(t) = 0$, on en déduit alors que la fonction Φ

prend des valeurs strictement négatives sur \mathbb{R}_+^* . On en conclut finalement que l'on a :

$\varphi'(t) > 0$ sur \mathbb{R}_+^* . Ainsi, la fonction φ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .

On a alors pour tous réels a et b strictement positifs :

$$a < b \Leftrightarrow \varphi(a) < \varphi(b) \Leftrightarrow \frac{e^{-ax}}{a} - \frac{1}{a} < \frac{e^{-bx}}{b} - \frac{1}{b} \Leftrightarrow a - b < ae^{-bx} - be^{-ax}$$

Le résultat étant établi pour un réel x strictement positif quelconque fixé, il est valable pour tout x réel strictement positif.

Résultat final

Pour tous réels a et b strictement positifs tels que $0 < a < b$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, ae^{-bx} - be^{-ax} > a - b$$