

Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$$

Analyse

Une analyse de la limite proposée (limite du numérateur d'une part, du dénominateur, d'autre part) nous conduit à une certaine type d'indétermination qui DOIT faire penser au calcul d'un nombre dérivé. A partir de là, on peut adopter deux approches ...

Résolution

On a, en tenant compte de la continuité en 0 du sinus et de l'exponentielle :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin 0 = 0 \\ \lim_{X \rightarrow 0} e^X = e^0 = 1 \end{array} \right\} \text{composition} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} e^{\sin x} = 1$$

D'où : $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{\sin x} - 1) = 0$.

On a donc affaire à une forme indéterminée du type « $\frac{0}{0}$ » et nous devons penser au calcul d'un nombre dérivé.

A partir de là, on peut penser à la limite classique (nombre dérivé de l'exponentielle en 0) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = \exp(0) = 1$$

Nous pouvons nous ramener à cette limite comme suit :

$$\frac{e^{\sin x} - 1}{x} = \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \times \frac{\sin x}{x}$$

On a :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin 0 = 0 \\ \lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1 \end{array} \right\} \text{composition} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} = 1$$

Par ailleurs, on a la limite classique : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

On en déduit (par produit) : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{\sin x} - 1}{\sin x} \times \frac{\sin x}{x} \right) = 1 \times 1 = 1$.

Pour $x = 0$, on a : $e^{\sin x} = e^0 = 1$.

La limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x}$ serait donc, si elle est finie, le nombre dérivé de la fonction

$\varphi : x \mapsto e^{\sin x}$ pour $x = 0$.

Les fonctions sinus et exponentielle étant dérivable sur \mathbb{R} , il en va de même pour la fonction φ et pour tout x réel, on a : $\varphi'(x) = \sin'(x) \times e^{\sin x} = \cos(x) \times \varphi(x)$.

Il vient alors : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = \varphi'(0) = \cos(0) \times \varphi(0) = 1 \times 1 = 1$.

On retrouve le résultat obtenu précédemment.

Résultat final

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x} = 1$$