

Soit  $n$  réels ( $n \geq 2$ )  $a_1, a_2, \dots, a_n$  vérifiant :  $1 < a_1 < a_2 < \dots < a_n$ .

1. Montrer que pour tout réel  $a$  strictement supérieur à  $a_n$ , il existe un unique réel  $x_a$  solution de l'équation :

$$a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x = a^x$$

2. Pour  $a$  et  $b$  tels que  $a_n < a < b$ , comparer  $x_a$  et  $x_b$ .

3. Déterminer  $\lim_{a \rightarrow +\infty} x_a$  puis  $\lim_{a \rightarrow +\infty} (x_a \ln a)$ .

---

## Analyse

L'exercice permet en fait d'étudier la solution strictement positive (le réel  $x_a$ ) d'une équation en fonction de l'un de ses paramètres (le réel  $a$ ). La dernière question permet, en particulier, d'obtenir le comportement asymptotique de cette solution.

---

## Résolution

### Question 1.

On a immédiatement :

$$a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x = a^x \Leftrightarrow \frac{a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x}{a^x} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{a_1}{a}\right)^x + \left(\frac{a_2}{a}\right)^x + \dots + \left(\frac{a_n}{a}\right)^x = 1$$

Soit alors la fonction  $\Phi_a$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$\Phi_a(x) = \left(\frac{a_1}{a}\right)^x + \left(\frac{a_2}{a}\right)^x + \dots + \left(\frac{a_n}{a}\right)^x$$

La fonction  $\Phi_a$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  comme somme de fonctions continues (en tant que fonctions exponentielles) sur cet intervalle.

Par ailleurs, la fonction  $\Phi_a$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$  comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle et on a, pour tout réel  $x$  positif :

$$\Phi_a'(x) = \ln\left(\frac{a_1}{a}\right) \times \left(\frac{a_1}{a}\right)^x + \ln\left(\frac{a_2}{a}\right) \times \left(\frac{a_2}{a}\right)^x + \dots + \ln\left(\frac{a_n}{a}\right) \times \left(\frac{a_n}{a}\right)^x = \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{a_i}{a}\right) \times \left(\frac{a_i}{a}\right)^x$$

Pour tout entier  $i$  dans  $\llbracket 1; n \rrbracket$ , on a :  $0 < \frac{a_i}{a} < 1$  et donc  $\ln\left(\frac{a_i}{a}\right) < 0$ . Par ailleurs, on a également :  $\left(\frac{a_i}{a}\right)^x > 0$ . On en déduit que chaque terme de la somme  $\sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{a_i}{a}\right) \times \left(\frac{a_i}{a}\right)^x$  est strictement négatif et, finalement :  $\Phi_a'(x) = \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{a_i}{a}\right) \times \left(\frac{a_i}{a}\right)^x < 0$ . La fonction  $\Phi_a$  est donc strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$ .

On a :  $\Phi_a(0) = \left(\frac{a_1}{a}\right)^0 + \left(\frac{a_2}{a}\right)^0 + \dots + \left(\frac{a_n}{a}\right)^0 = 1 + 1 + \dots + 1 = n > 1$  (par hypothèse sur  $n$ ).

Comme, pour tout entier  $i$  dans  $\llbracket 1; n \rrbracket$ , on a :  $0 < \frac{a_i}{a} < 1$ , il vient  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a_i}{a}\right)^x = 0$  et donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi_a(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{a_i}{a}\right) \times \left(\frac{a_i}{a}\right)^x = 0 < 1$$

D'après ce qui précède, la fonction  $\Phi_a$  définit une bijection de  $\mathbb{R}_+$  dans  $]0; n]$  et comme  $0 < 1 < n$ , on en déduit finalement qu'il existe un unique réel  $x_a$  strictement positif solution de l'équation :  $\Phi_a(x) = 1$ . Le résultat est ainsi établi.

L'équation  $a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x = a^x$  admet une unique solution dans  $\mathbb{R}_+^*$ .

### Question 2.

Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a_n < a < b$ .

D'après la question précédente, on a :

$$\Phi_a(x_a) = \left(\frac{a_1}{a}\right)^{x_a} + \left(\frac{a_2}{a}\right)^{x_a} + \dots + \left(\frac{a_n}{a}\right)^{x_a} = 1 \text{ et } \Phi_b(x_b) = \left(\frac{a_1}{b}\right)^{x_b} + \left(\frac{a_2}{b}\right)^{x_b} + \dots + \left(\frac{a_n}{b}\right)^{x_b} = 1$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \Phi_a(x_b) &= \left(\frac{a_1}{a}\right)^{x_b} + \left(\frac{a_2}{a}\right)^{x_b} + \dots + \left(\frac{a_n}{a}\right)^{x_b} \\ &= \frac{a_1^{x_b} + a_2^{x_b} + \dots + a_n^{x_b}}{a^{x_b}} = \frac{a_1^{x_b} + a_2^{x_b} + \dots + a_n^{x_b}}{b^{x_b}} \times \frac{b^{x_b}}{a^{x_b}} \\ &= \frac{a_1^{x_b} + a_2^{x_b} + \dots + a_n^{x_b}}{b^{x_b}} \times \left(\frac{b}{a}\right)^{x_b} = \underbrace{\Phi_b(x_b)}_{=1} \times \left(\frac{b}{a}\right)^{x_b} \\ &= \left(\frac{b}{a}\right)^{x_b} \end{aligned}$$

Comme on a  $\frac{b}{a} > 1$  et  $x_b > 0$ , il vient  $\left(\frac{b}{a}\right)^{x_b} > 1$ . D'où, en tenant compte de la décroissance stricte de la fonction  $\Phi_a$  :

$$\Phi_a(x_b) > 1 \Leftrightarrow \Phi_a(x_b) > \Phi_a(x_a) \Leftrightarrow x_b < x_a$$

Ainsi,  $a_n < a < b \Rightarrow x_b < x_a$ .

### Question 3.

Soit  $\varphi$  la fonction définie par :

$$\varphi : \begin{cases} ]a_n ; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ a \mapsto x_a \end{cases}$$

D'après la question précédente, la fonction  $\varphi$  est strictement décroissante. Etant minorée par 0, elle admet donc une limite finie en  $+\infty$ .

On a :  $na_1^x < a_1^x + a_2^x + \dots + a_n^x < na_n^x \Rightarrow na_1^{x_a} < a_1^{x_a} + a_2^{x_a} + \dots + a_n^{x_a} < na_n^{x_a}$ , c'est-à-dire :

$$na_1^{x_a} < a^{x_a} < na_n^{x_a}$$

D'où :  $\frac{na_1^{x_a}}{a^{x_a}} < 1 < \frac{na_n^{x_a}}{a^{x_a}}$ , soit :  $n\left(\frac{a_1}{a}\right)^{x_a} < 1 < n\left(\frac{a_n}{a}\right)^{x_a}$  puis :

$$\ln n + x_a \ln\left(\frac{a_1}{a}\right) < 0 < \ln n + x_a \ln\left(\frac{a_n}{a}\right)$$

En tenant compte du fait que  $\ln\left(\frac{a_1}{a}\right)$  et  $\ln\left(\frac{a_n}{a}\right)$  sont strictement négatifs, on obtient finalement l'encadrement suivant :

$$\frac{\ln n}{\ln\left(\frac{a}{a_1}\right)} < x_a < \frac{\ln n}{\ln\left(\frac{a}{a_n}\right)}$$

On a immédiatement :  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{a}{a_1} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{a}{a_n} = +\infty$  puis  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{a}{a_1}\right) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{a}{a_n}\right) = +\infty$ .

On a enfin :  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{\ln\left(\frac{a}{a_1}\right)} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{\ln\left(\frac{a}{a_n}\right)} = \lim_{a \rightarrow +\infty} x_a = 0$ .

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} x_a = 0$$

L'encadrement  $\frac{\ln n}{\ln\left(\frac{a}{a_1}\right)} < x_a < \frac{\ln n}{\ln\left(\frac{a}{a_n}\right)}$  nous donne également :

$$\frac{\ln n}{\ln\left(\frac{a}{a_1}\right)} \ln a < x_a \ln a < \frac{\ln n}{\ln\left(\frac{a}{a_n}\right)} \ln a$$

Soit :  $\frac{\ln n}{1 - \frac{\ln a_1}{\ln a}} \ln a < x_a \ln a < \frac{\ln n}{1 - \frac{\ln a_n}{\ln a}}$ .

Comme  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln a_1}{\ln a}\right) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln a_n}{\ln a}\right) = 1$ , il vient finalement :  $\lim_{a \rightarrow +\infty} (x_a \ln a) = \ln n$ .

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} (x_a \ln a) = \ln n$$