Résoudre :

$$x^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{x}\right)^x$$

Analyse

On doit bien sûr avoir x non nul. Pour $x > 0$ on peut utiliser les écritures exponentielles. Mais ne doit-on pas également réfléchir à d'éventuelles solutions négatives ?

Résolution

Pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\begin{gathered} x^{\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{x}\right)^x \\ \Leftrightarrow e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{x\ln\left(\frac{1}{x}\right)} \Leftrightarrow \frac{1}{x}\ln x = -x\ln x \\ \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)\ln x = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x}\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \\ \Leftrightarrow x = 1 \end{gathered}$$

Nous obtenons ainsi la seule solution strictement positive de l'équation.

Si l'on cherche maintenant une solution strictement négative, la seule présence de $x^{\frac{1}{x}}$ nous impose de restreindre x à $\mathbb{Q}_-^*$ sans quoi cette expression ne serait pas définie. Pour x dans $\mathbb{Q}_-^*$, le second membre $\left(\frac{1}{x}\right)^x$ peut alors lui aussi être défini (même si ce n'est pas pour toute valeur de x).

Posons alors $x = \frac{p}{q}$ avec p entier strictement négatif, q entier strictement positif et p et q premiers entre eux.

Il vient :

$$x^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{1}{x}\right)^{x}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{q}{p}}=\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{p}{q}}\Leftrightarrow\left(\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{q}{p}}\right)^{p\times q}=\left(\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{p}{q}}\right)^{p\times q}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{p}{q}\right)^{q^2}=\left(\frac{q}{p}\right)^{p^2}\Leftrightarrow\left(\frac{p}{q}\right)^{q^2}=\left(\frac{p}{q}\right)^{-p^2}\Leftrightarrow\left(\frac{p}{q}\right)^{p^2+q^2}=1$$

Ainsi, on a nécessairement $x=\frac{p}{q}=-1$ (rappelons que nous travaillons dans $\mathbb{Q}_-^*$), soit, avec nos notations $p=-1$ et $q=1$. D'où $p^2+q^2=(-1)^2+1^2=1+1=2$ et $\left(\frac{p}{q}\right)^{p^2+q^2}=(-1)^2=1$.

L'équation est bien vérifiée. -1 est solution.

Résultat final

L'équation $x^{\frac{1}{x}}=\left(\frac{1}{x}\right)^{x}$ admet donc comme solutions : -1 et 1.