Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$1+e^2+e^4+...+e^{2n}=\frac{e^{2n+2}-1}{e^2-1}$$

Analyse

Bien regarder la somme du membre de gauche est absolument indispensable pour démontrer l'égalité rapidement…

Résolution

Soit n un entier naturel.

La somme du membre de gauche comporte $n+1$ termes et peut être écrite :

$$1+e^2+e^4+...+e^{2n}=1+e^2+\left(e^2\right)^2+...+\left(e^2\right)^n$$

Nous avons donc affaire aux $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison e^2 et il vient immédiatement :

$$\begin{aligned}1+e^2+e^4+...+e^{2n}&=1+e^2+\left(e^2\right)^2+...+\left(e^2\right)^n\\&=\frac{1-\left(e^2\right)^{n+1}}{1-e^2}\\&=\frac{e^{2(n+1)}-1}{e^2-1}\\&=\frac{e^{2n+2}-1}{e^2-1}\end{aligned}$$

Résultat final

$$\forall n\in\mathbb{N}, 1+e^2+e^4+...+e^{2n}=\frac{e^{2n+2}-1}{e^2-1}$$