Etudier la série de terme général :

$$u_n = \ln \frac{n^4+3n^2+n}{n^4+2n^2-n+1}$$

Analyse

On doit d'emblée remarquer que l'argument du logarithme népérien est une fraction rationnelle en *n* dont le degré du numérateur est égal à celui du dénominateur.
On exploite cette remarque de deux manières :

- D'une part, on montre qu'à partir d'une certain rang, on a : $u_n > 0$;
- D'autre part, on peut trouver un équivalent de u_n au voisinage de $+\infty$.

Résolution

On a :

$$n^4+3n^2+n > n^4+2n^2-n+1 \Leftrightarrow n^2+2n-1>0$$

On trouve facilement les racines du polynôme X^2+2X-1 : $-1-\sqrt{2}$ et $-1+\sqrt{2}$.

Comme $-1-\sqrt{2}<0$ et $-1+\sqrt{2} \in]0;1[$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n^4+3n^2+n}{n^4+2n^2-n+1} > 1$.

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln \frac{n^4+3n^2+n}{n^4+2n^2-n+1} > 0$.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$.

On a donc affaire à une série dont le terme général est strictement positif pour $n>1$.

Effectuons la division du polynôme $P(X) = X^4+3X^2+X$ par le polynôme $Q(X) = X^4+2X^2-X+1$.

On obtient immédiatement :

$$\begin{aligned} P(X) &= X^4+3X^2+X \\ &= \left(X^4+2X^2-X+1\right)+X^2+2X-1 \\ &= Q(X)+X^2+2X-1 \end{aligned}$$

On a alors :

$$\frac{n^4+3n^2+n}{n^4+2n^2-n+1}=\frac{\left(n^4+2n^2-n+1\right)+n^2+2n-1}{n^4+2n^2-n+1}=1+\frac{n^2+2n-1}{n^4+2n^2-n+1}$$

Au voisinage de $+\infty$, le rapport $\frac{n^2+2n-1}{n^4+2n^2-n+1}$ est un infiniment petit équivalent à $\frac{1}{n^2}$ (rapport des termes de plus haut degré).

On en déduit alors que $\ln\left(1+\frac{n^2+2n-1}{n^4+2n^2-n+1}\right)$ est également équivalent à $\frac{1}{n^2}$ au voisinage de $+\infty$.

Comme les terme général de la série $\sum u_n$ est équivalent à $\frac{1}{n^2}$ et que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, on en déduit finalement :

$$\sum u_n \text{ converge}$$

Résultat final

La série de terme général $\ln\frac{n^4+3n^2+n}{n^4+2n^2-n+1}$ est convergente.