

Etudier la série de terme général :

$$u_n = \frac{\ln n}{n}$$

---

## Analyse

On doit d'emblée remarquer que pour  $n$  suffisamment grand, on a  $u_n > 0$ .

On écrit alors que  $u_n$  majore le terme général d'une série classique ...

---

## Résolution

On a :  $\ln 1 = 0$  et  $\ln$  est une fonction strictement croissante sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

On en tire :  $\forall n \in \mathbb{N}, n > 1 \Rightarrow \ln n > 0$ .

Le terme général  $u_n$  est donc strictement positif à partir du rang 2.

Par ailleurs,  $e \simeq 2,718$  et  $\ln e = 1$

On a alors :  $\forall n \in \mathbb{N}, n > 2 \Rightarrow \frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$ .

Or, la série  $\sum \frac{1}{n}$  est divergente :  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$ .

On a donc minoré le terme général de la série  $\sum \frac{\ln n}{n}$  par le terme général d'une série dont la somme est infinie.

On en déduit finalement :

$$\sum \frac{\ln n}{n} \text{ diverge}$$

---

## Résultat final

La série de terme général  $\frac{\ln n}{n}$  est divergente.