Etudier la série de terme général :

$$u_n = \frac{1!+2!+3!+\ldots+(n-1)!}{(n+2)!}$$

Analyse

On doit d'emblée remarquer que le terme général de la série, défini pour $n \geq 1$, est positif. Ensuite, la présence des factorielles, la forme du numérateur (somme de factorielles) et la différence entre $n-1$, au numérateur, et $n+2$, au dénominateur, suggère de s'orienter vers une majoration du numérateur …

Résolution

Comme mentionné ci-dessus, on a affaire à une série à termes positifs.

On a : $\underbrace{1!+2!+3!+\ldots+(n-1)!}_{n-1 \text{ termes}} < (n-1)\times(n-1)!$

D'où : $\dfrac{1!+2!+3!+\ldots+(n-1)!}{(n+2)!} < \dfrac{(n-1)\times(n-1)!}{(n+2)!}$

Or : $\dfrac{(n-1)\times(n-1)!}{(n+2)!} = \dfrac{n-1}{(n+2)(n+1)n}$, puis : $\dfrac{n-1}{(n+2)(n+1)n} < \dfrac{n}{(n+2)(n+1)n} < \dfrac{1}{n^2}$

Finalement, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n < \dfrac{1}{n^2}$.

On a majoré le terme général d'une série à termes positifs par celui d'une série convergente $\left(\sum \dfrac{1}{n^2}\right)$, on en déduit : $\sum \dfrac{1!+2!+3!+\ldots+(n-1)!}{(n+2)!}$ converge.

Résultat final

La série de terme général $\dfrac{1!+2!+3!+\ldots+(n-1)!}{(n+2)!}$ est convergente.