Etudier la série de terme général :

$$u_n = \frac{2n^5}{(n+2)!}$$

Analyse

On doit d'emblée remarquer que le terme général de la série est positif.
Ensuite, la présence de la factorielle, la forme du numérateur (puissance), suggère de s'orienter vers la règle de D'Alembert …

Résolution

Comme mentionné ci-dessus, on a affaire à une série à termes positifs.

On a alors, pour tout entier naturel n :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2(n+1)^5}{(n+3)!}}{\frac{2n^5}{(n+2)!}} = \frac{2(n+1)^5}{(n+3)!} \times \frac{(n+2)!}{2n^5} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^5 \times \frac{(n+2)!}{(n+3)!} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^5 \times \frac{1}{n+3}$$

On a : $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$ et, de fait : $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^5 = 1$.

Par ailleurs : $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+3} = 0$.

Il vient alors : $\lim_{n\to+\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 0$.

D'après la règle de D'Alembert, la série de terme général $u_n = \frac{2n^5}{(n+2)!}$ est convergente.

Résultat final

La série de terme général $u_n = \frac{2n^5}{(n+2)!}$ est convergente.