Etudier la série de terme général : $u_n = \dfrac{a^{b^n}}{b^{a^n}}$ où a et b sont deux réels strictement positifs.

Analyse

La forme du terme général suggère de travailler avec son logarithme népérien. Une discussion apparaît alors assez naturellement …

Résolution

Les réels a et b étant strictement positifs, nous avons affaire à une série dont le terme général est strictement positif et pouvons poser, pour tout entier nature n :

$$v_n = \ln u_n = \ln \frac{a^{b^n}}{b^{a^n}} = b^n \ln a - a^n \ln b$$

La limite de (v_n) va dépendre des valeurs des réels a et b par rapport à la valeur 1 (présence de $\ln a$ et $\ln b$) mais aussi de l'égalité éventuelle de ces deux réels (cas « très » particulier où v_n vaut 0 pour tout entier naturel n).

1er cas : $a = b$

Dans ces conditions, on a, pour tout entier naturel n, $v_n = 0$ et $u_n = 1$. La série $\sum u_n$ diverge trivialement.

2ème cas : $a \neq b$

- Si $a = 1$ ou $b = 1$, on a respectivement $u_n = \dfrac{1}{b}$ ou $u_n = a$. Dans les deux cas, la suite (u_n) est constante non nulle et la série $\sum u_n$ diverge trivialement.

- Si a et b appartiennent à l'intervalle $]0;1[$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = \lim\limits_{n\to+\infty} b^n = 0$ et : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. On en déduit alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et la série $\sum u_n$ diverge trivialement ;

- Si $0 < a < 1 < b$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = 0$ et $\ln a < 0$.

On en déduit $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \left(b^n \ln a\right) = -\infty$.

On a : $v_n \sim b^n \ln a$ et $\lim_{n\to+\infty} \left(v_n - b^n \ln a\right) = 0$. On en déduit, en passant à l'exponentielle : $u_n \sim a^{b^n}$. La série $\sum a^{b^n}$ est convergente (règle de D'Alembert, par exemple, ou : il existe n_0 tel que, à partir de ce rang, $b^n > n$. On a alors $a^{b^n} < a^n$ et $\sum a^n$ converge car $0 < a < 1$). D'où : la série $\sum u_n$ converge.

- Si $0 < b < 1 < a$, on a $\lim_{n\to+\infty} b^n = 0$ et $\ln b < 0$.

  On en déduit $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \left(-a^n \ln b\right) = +\infty$. D'où : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. La série $\sum u_n$ diverge trivialement.

- $1 < a < b$. On a alors : $v_n = b^n \left(\ln a - \dfrac{a^n}{b^n} \ln b \right) = b^n \left(\ln a - \left(\dfrac{a}{b}\right)^n \ln b \right)$. Comme $a < b$, on a : $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = 0$. Il vient alors : $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. D'où : $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. La série $\sum u_n$ diverge trivialement.

- $1 < b < a$. On a alors : $v_n = a^n \left(\dfrac{b^n}{a^n} \ln a - \ln b \right) = a^n \left(\left(\dfrac{b}{a}\right)^n \ln a - \ln b \right)$. Comme $b < a$, on a : $\lim_{n\to+\infty} \left(\dfrac{b}{a}\right)^n = 0$. On a alors : $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \left(-a^n \ln b\right) = -\infty$ et $v_n \sim -a^n \ln b$. Mais on ne peut cette fois en déduire un équivalent de u_n car $\lim_{n\to+\infty} \left(v_n + a^n \ln b\right) \neq 0$ (la limite de cette différence est infinie).

  Pour autant, nous allons pouvoir conclure en posant :

$$w_n = \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ln \frac{a^{b^{n+1}}}{b^{a^{n+1}}} \times \frac{b^{a^n}}{a^{b^n}} = \ln \frac{a^{b^{n+1}-b^n}}{b^{a^{n+1}-a^n}} = \ln \frac{a^{b^n(b-1)}}{b^{a^n(a-1)}}$$
$$= (b-1)b^n \ln a - (a-1)a^n \ln b$$

  Comme, $1 < b < a$, on a : $w_n = a^n \left[\left(\dfrac{b}{a}\right)^n (b-1)\ln a - (a-1)\ln b \right]$.

  On en déduit alors : $\lim_{n\to+\infty} w_n = -\infty$, d'où : $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0$.

  La série $\sum u_n$ converge.

En résumé, la série $\sum u_n$ converge dans deux situations :

- $0 < a < 1 < b$;
- $1 < b < a$.

Résultat final

Pour a et b réels strictement positifs, la série de terme général $u_n = \dfrac{a^{b^n}}{b^{a^n}}$ est convergente dans les deux cas suivants : $0 < a < 1 < b$ et $1 < b < a$.