Etudier la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{n.\sqrt[n]{n}}.$$

Analyse

On étudie dans un premier temps la limite de (u_n) en $+\infty$. Cette étude fournit les éléments requis pour pouvoir conclure …

Résolution

Nous avons affaire à une série à termes positifs.

Etudions, dans un premier temps, la limite en $+\infty$ de (u_n).

On a : $\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln n}{n}}$.

Or, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$. Donc : $\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = 1$

On en déduit : $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n} \times \frac{1}{e^{\frac{\ln n}{n}}} \right) = 0$.

Le terme général de la série tend vers 0

D'après l'étude précédente, on a : $\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = 1 = \lim_{n\to+\infty} nu_n$. Soit : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Or la série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente. On en déduit, finalement, que la série de terme général u_n diverge.

Résultat final

La série $\sum \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ diverge.