Etudier la série de terme général :

$$u_n = n^{\frac{1}{n^2}} - 1.$$

## Analyse

On étudie dans un premier temps le signe de $u_n$ et la limite de $(u_n)$ en $+\infty$. Cette étude fournit les éléments requis pour pouvoir conclure …

## Résolution

On a immédiatement : $u_n = e^{\frac{\ln n}{n^2}} - 1$.

Pour tout entier naturel n non nul, on a $\ln n \geq 0$ et $n^2 > 0$. On en déduit : $e^{\frac{\ln n}{n^2}} \geq 1$ et, finalement : $u_n \geq 0$.

Nous avons donc affaire à une série à termes positifs.

A partir de $u_n = e^{\frac{\ln n}{n^2}} - 1$, on a immédiatement : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2}$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0$ alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Mais on a également : $\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{2}} \frac{\ln n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$ (pour rappel : poser $k = \sqrt{n}$).

On en déduit : $\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{3}{2}} u_n = 0$. On en déduit alors (séries de Riemann) que la série de terme général $u_n = e^{\frac{\ln n}{n^2}} - 1$ converge.

## Résultat final

La série $\sum \left( e^{\frac{\ln n}{n^2}} - 1 \right)$ converge.